



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MODELÝ MATEMATICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ PRO ÚLOHY OPTIMÁLNÍHO ŘÍZENÍ

MATHEMATICAL PROGRAMMING MODELS FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Bc. JAN DRAŽKA

RNDr. PAVEL POPELA, Ph.D

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Jan Dražka

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901T021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Modely matematického programování pro úlohy optimálního řízení

v anglickém jazyce:

Mathematical Programming Models for Optimal Control Problems

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student se seznámí s problematikou transformace vybraných úloh optimálního řízení na úlohy matematického programování. Prostuduje vlastnosti vybraných transformací a modelů a výsledky bude aplikovat na vhodné aplikační úlohy inženýrských oborů. Práce bude doplněna implementací a testovacími výpočty.

Cíle diplomové práce:

Cílem práce je přispět k vývoji modelů a algoritmů podle zadaného tématu a k rozvinutí jeho aplikovatelnosti v podmínkách VUT a FSI, a to v návaznosti na existující požadavky řešených projektů. Diplomant bude zapojen do vybraného projektu a rozvoje spolupráce ústavu matematiky s vybraným odborným ústavem.

Seznam odborné literatury:

J.T. Betts: Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming. SIAM, 2001.
D. Tabak, B.C. Kuo: Optimal Control by Mathematical Programming. SRL publ.comp. 1971.
J. Čermák: Matematické základy optimálního řízení. FSI VUT Brno 1998.

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Práce se zabývá optimalizací (závodní) jízdy vozu po dráze. Je v ní vytvořen model vozidla i dráhy, po níž se vozidlo pohybuje. V první kapitole se formuluje úloha nejrychlejšího průjezdu, která optimalizuje jízdu závodního vozidla tak, aby se ze startu do cíle dostalo v co nejkratším čase. Úloha je formulována jako úloha optimálního řízení. V druhé kapitole se úloha nejrychlejšího průjezdu vhodně diskretizuje a transformuje na úlohu nelineárního programování. Stěžejní část práce tvoří právě transformace úlohy nejrychlejšího průjezdu na úlohu nelineárního programování a její detailní a názorné odvození a nová formulace. V třetí kapitole je úloha nejrychlejšího průjezdu implementována a řešena v prostředí GAMS a MATLAB. Tato práce navazuje na projekt specifického výzkumu, do něhož je autor zapojen. Přínos autora spočívá především ve vlastní a originální formulaci úlohy nejrychlejšího průjezdu jakožto úlohy nelineárního programování a její implementaci a následnému vyřešení v programu GAMS.

Abstract

This thesis deals with optimization of a vehicle's (racing) drive on a track. The model of a vehicle and a track is built in this thesis. The first chapter is devoted to the fastest pass problem formulation. The problem optimizes (in the least time) the vehicle's drive from a start line to a finish line. The problem is formulated as an optimal control theory problem. In the second chapter the optimal control theory problem is suitably discretised and transformed into a nonlinear programming problem. The transformation of the fastest pass problem into nonlinear programming problem, its detailed and illustrative derivation and reformulation form the main part of the thesis. Third chapter presents the implementation and solution of the problem using GAMS and MATLAB. This thesis is a part of a specific research project on which the author has participated. The main contribution of the author is an original formulation of the fastest pass problem as a nonlinear programming problem and its implementation and solving using GAMS.

Klíčová slova

Optimální řízení, nelineární programování, vozidlo, modelování, optimalizace

Key words

Optimal Control, Nonlinear programming, vehicle, mathematical model, optimization

DRAŽKA, J. Modely matematického programování pro úlohy optimálního řízení. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 46 s. Vedoucí diplomové práce RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci Modely matematického programování pro úlohy optimálního řízení vypracoval samostatně pod vedením RNDr. Pavla Popely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. JanDražka

Velice rád bych poděkoval především svému vedoucímu, RNDr. Pavlu Popelovi, Ph.D., který mě při psaní této práce stejně jako při psaní mé bakalářské práce vedl s velkým nadhledem a zejména mě neustále povzbuzoval. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Petru Portešovi, Dr. za jeho ochotnou pomoc a radu, kdykoliv jsem to jen potřeboval, a také za to, že mě zapojil do specifického výzkumu. Naposledy moc děkuji Ing. Janě Hrabalové, že mi celou práci velice pozorně zkontrolovala a při práci mě podpořila nejen po matematické stránce 😊😊😊

Obsah

Úvod	4
1. Úloha nejrychlejšího průjezdu jako úloha optimálního řízení	5
1.1 Zavedení základních pojmů teorie optimálního řízení	5
1.2 Motivační úloha	8
1.3 Úloha nejrychlejšího průjezdu jako úloha optimálního řízení	13
1.4 Řešitelnost úlohy optimálního řízení	15
1.5 Zavedení základních úloh nelineárního programování	17
2. Transformace úlohy optimálního řízení na úlohu nelineárního programování	19
2.1 Zavedení úvodních pojmů	19
2.2 Převod závislosti rovnic z času na parametr prostoru	21
2.3 Převod soustavy rovnic diferenciálních na diferenční	22
2.4 Doplnění soustavy diferenčních rovnic	24
2.5 Pojem systému a obor regulace	26
2.6 Úloha nejkratší cesty	28
2.7 Rozšíření úlohy nejkratší cesty	30
2.8 Rozšíření oboru regulace	33
2.9 Formulace úlohy nejrychlejšího průjezdu	35
3. Implementace v prostředí GAMS a MATLAB	37
3.1 Motivační příklad	37
3.2 Modifikace motivačního příkladu	39
3.3 Rozšíření úlohy	41
3.4 Návaznost práce	44
Závěr	45
Literatura	46

Úvod

Již od nepaměti se lidé snaží život si pokud možno zjednodušit a zpříjemnit a svou práci zefektivnit tak, aby za cenu menšího úsilí dosáhli lepšího výsledku. Často se lidé snaží vymyslet, jak postavit most s použitím co nejméně materiálu, jak vhodně investovat peníze, aby zisk z nich byl maximální, apod. Tyto a jim podobné úlohy se různé (nejen) technické disciplíny snaží matematicky formulovat, vyřešit a výsledky pak efektivně aplikovat. Jako vhodný matematický aparát se v těchto úlohách používá teorie optimálního řízení [2] a teorie matematického programování [1]. Jednou z těchto úloh je úloha, jak se z bodu A dostat do bodu B v co nejkratším čase. Tato úloha je pro mnoho řidičů automobilů velice důležitá - zejména pro účastníky automobilových závodů. Mezi řidiči se v každé době našla řada lidí, kteří tuto úlohu brali a berou jako vážnou výzvu a snaží se v umění „dostat se z bodu A do bodu B“ vyniknout. Lidská touha zvítězit, být rychlejší než ti druzí je často hnacím motorem technického pokroku lidstva. Kdysi v této úloze hrálo důležitou roli právě vozidlo. Jednotlivé automobilky se proto snažily vyvinout co nejsilnější a nejrychlejší vůz. V dnešní době vládne automobilovým závodům soutěž formule F1. Ovšem vozy formule různých stájí jsou si svými vlastnostmi velice podobné, parametry těchto formulí jsou totiž přesně vymezeny pravidly. Proto k vítězství vede zejména precizní a bezchybná jízda závodníka po závodní trati. K dosažení vítězství se používá mnoha metod a jednou z nich může být matematické modelování závodního vozu a jízdního stylu. Pomocí tohoto modelu lze závodníkům pomoci nalézt optimální trajektorii, po jaké se mají s vozem pohybovat (jak si do zatáčky nadjet, kdy nejpozději začít brzdit, a kdy už lze zrychlovat a jak optimálně projet například „esíčko“).

Cílem této práce je vytvořit model trati, vozidla a závodní jízdy. Pomocí tohoto modelu pak matematicky formulovat úlohu nejrychlejšího průjezdu úseku trati a tuto úlohu se snažit vyřešit. Protože autor této práce byl mimo jiné zapojen do projektu specifického výzkumu FSI-J-12-1803 s podobným zaměřením, budou v této práci uvedeny i autorem získané výsledky a nastíněno, jak lze podobnou úlohu modelovat a řešit v prostředí MATLAB. Tato práce řeší aktuální úlohy a principy metody použité v práci navazují na [3]. Autor ve své práci rovněž využil poznatky získané během odborných konzultací na Ústavu automobilního a dopravního inženýrství, FSI, VUT v Brně.

Úlohu nejprve v první kapitole zformulujeme jako úlohu optimálního řízení a prodiskutujeme její řešitelnost. Základní pojmy uvedeme v kontextu řešené úlohy. V druhé kapitole se budeme věnovat transformaci této úlohy na úlohu nelineárního programování. V třetí poslední kapitole budeme tuto úlohu řešit jakožto úlohu nelineárního programování pomocí softwaru GAMS a předvedeme dosažené výsledky.

1. Úloha nejrychlejšího průjezdu jako úloha optimálního řízení

Mnoho disciplín ve fyzice, mechanice nebo dynamice řeší úlohy optimálního řízení. V těchto úlohách se nejčastěji setkáváme s objektem, který se pohybuje v prostoru. Tímto objektem může být například raketa, která má přistát na měsíci, střela, která má zasáhnout cíl nebo třeba automobil, který se má z místa A dostat do místa B. Pohyb takovýchto soustav je nejčastěji popsán soustavou diferenciálních rovnic opatřenou počátečními (případně okrajovými) podmínkami. Tato soustava diferenciálních rovnic je odvozena z fyzikálních zákonů, kterým každý objekt podléhá. Mnoho aplikačních úloh řeší pouze tyto pohybové diferenciální rovnice. Tím modeluje chování objektu jednoznačně určeného soustavou rovnic a počáteční podmínkou. Takovou úlohou může být např. úloha o doletu rakety - do jakého místa dopadne raketa, je-li vystřelena ze zadaného místa a je-li její pohyb dán soustavou diferenciálních rovnic.

Úlohy optimálního řízení si kladou cíl ještě složitější. Předpokládají totiž, že pohyb objektu se dá nějakým způsobem řídit, ovládat či regulovat. Raketa letící na měsíc může díky raketovému motoru zrychlovat i brzdít, řízená vojenská střela může korigovat svůj směr a automobil může libovolně zatáčet a zrychlovat či brzdít. Aby tento pohyb šlo matematicky modelovat, zavádějí se speciální funkce, tzv. regulace. Úlohy optimálního řízení si pak kladou za cíl nalézt takové regulace, které zajistí, aby se objekt dostal z daného místa A na určené místo B regulovaným, tj. řízeným pohybem. Navíc mezi těmito regulacemi hledají takovou, která zaručí, aby pohyb objektu byl v jistém smyslu optimální – např. aby raketa při cestě na měsíc spotřebovala co nejméně paliva nebo aby se závodní vozidlo dostalo do cíle v co nejkratším čase.

V této kapitole si nejprve zavedeme základní pojmy z teorie optimálního řízení. Poté uvedeme motivační úlohu nejrychlejšího průjezdu, která je zároveň hlavní úlohou této práce a zformulujeme ji jako úlohu optimálního řízení. V dalším nastíníme analytickou řešitelnost této úlohy a zmíníme její úskalí. V závěru této kapitoly zavedeme základní pojmy z teorie optimalizace (konkrétně nelineárního programování), protože právě pomocí nelineárního programování budeme úlohu nejrychlejšího průjezdu řešit.

1.1 Zavedení základních pojmů teorie optimálního řízení

V naší práci budeme vyšetřovat, regulovat a optimalizovat pohyb vozidla. V dalších podkapitolách práce stanovíme, co se myslí pod pojmem „optimalizovat pohyb“ (např. pohyb z bodu A do bodu B realizovat po co nejkratší trajektorii nebo za co nejkratší čas). V této podkapitole definujeme, co máme na mysli pod pojmem regulovaný pohyb.

Okamžitý stav vozidla se dá popsat n reálnými čísly x_1, \dots, x_n , značícími například polohu, rychlost vozidla, atd. Vektorový prostor X vektorové proměnné $x = (x_1, \dots, x_n)$ nazýváme fázovým prostorem vozidla. Protože vozidlo se v čase t pohybuje, proměnná $x = (x_1, \dots, x_n)$ se v čase mění. Tuto skutečnost vyjádříme zápisem $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Dále uvažujeme, že se pohyb vozidla dá řídit (v definici 1.1 zavedeme přesnější pojem regulace). Toto řízení (regulaci) popíšeme m reálnými čísly u_1, \dots, u_m . Toto

řízení (regulace) rovněž závisí na čase, proto píšeme $u_1(t), \dots, u_m(t)$. Řízení (regulace) může nabývat libovolných hodnot z dané množiny $U \subset \mathbb{R}^m$. Tuto množinu nazveme oborem regulace. Zde a dále uvedené základní pojmy jsme zpracovali podle [6].

Definice 1.1. Regulací rozumíme vektorovou proměnnou $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ definovanou na nějakém intervalu $\langle 0, T \rangle$, jejíž hodnoty náležejí do oboru regulace $U \subset \mathbb{R}^m$.

Poznámka 1.1. Regulací může být například tažná síla nebo zrychlení vozidla, které je tažné síle přímo úměrné. Obor regulace U se stanovuje podle konkrétní úlohy. Má-li regulace u dimenzi $m = 2$, tj. $u = (u_1(t), u_2(t))$, oborem regulace může být například čtverec $U \subset \mathbb{R}^2$ nebo nějaká jeho podmnožina, například kruh:

$$U = \{u_1(t), u_2(t) \mid u_1^2(t) + u_2^2(t) \leq r^2, t \in \langle 0, T \rangle\}.$$

Obor regulace může být určen i komplikovanějšími podmínkami, jak tomu bude v úloze nejrychlejšího průjezdu, viz podkapitola 1.3.

Definice 1.2. Dále předpokládejme, že pohyb vozidla je dán soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Symbolem tečky nad proměnnou rozumíme v této práci derivaci proměnné výhradně podle času t . Předznamenáváme, že později v práci budeme uvažovat i jiné derivace než podle času, které značením odlišíme. O funkcích f_1, \dots, f_n budeme předpokládat, že jsou spojitě vzhledem k proměnným x_1, \dots, x_n a regulacím u_1, \dots, u_m a také spojitě diferencovatelné vzhledem k proměnným x_1, \dots, x_n . Tento předpoklad je pro námi řešenou úlohu logický, neboť proměnné x_1, \dots, x_n popisující stav vozidla (rychlost, poloha, atd.) jsou v čase spojitě funkce. Uvedenou soustavu budeme nazývat řízená soustava a označíme ji zkráceně

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{1.2}$$

V definici 1.1 jsme uvedli, že regulace u může nabývat libovolných hodnot z oboru regulace U . Je ale vhodné zabývat se jen některými regulacemi. Proto zavádíme následující definici.

Definice 1.3. K uvedené řízené soustavě (1.1) definujme ještě počáteční podmínky

$$x_1(0) = a_1, \dots, x_n(0) = a_n,$$

které pomocí bodu fázového prostoru $A = (a_1, \dots, a_n) \in X$ zkráceně zapíšeme:

$$x(0) = A.$$

Definice 1.4. Regulaci $u(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$ nazveme přípustnou regulací, jestliže pro libovolný bod $A \in X$ fázového prostoru vozidla existuje jediné řešení $x(t)$ řízené soustavy (1.2) vyhovující počáteční podmínce $x(0) = A$.

Označení. V práci se dále budeme zabývat pouze přípustnými regulacemi, proto přípustné regulace budeme dále nazývat většinou jen zkráceně regulace.

V aplikačních úlohách na pohyb vozidla klademe různé podmínky. Jednou z nich je podmínka, aby se vozidlo dostalo z jistého bodu A do jiného daného bodu B . Právě proto je potřeba pohyb regulovat. V následujícím odstavci definujeme regulaci, která převádí vozidlo z bodu A do bodu B .

Definice 1.5. Necht' $A, B \in X$ jsou dané body fázového prostoru vozidla. Řekneme, že (přípustná) regulace $u(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$ převádí bod A do bodu B , jestliže odpovídající řešení $x(t)$ řízené soustavy

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

je definováno na celém intervalu $\langle 0, T \rangle$ a vyhovuje jak počáteční, tak koncové podmínce:

$$x(0) = A,$$

$$x(T) = B.$$

Poznámka 1.2. Počáteční i koncovou podmínku lze rozepsat po složkách jako v definici 1.3.

V úlohách dále často klademe požadavek, aby vozidlo nejen splnilo všechny podmínky (dostat se z jistého bodu A do jiného daného bodu B), ale aby podmínky splnilo optimálně, např. aby se mezi body A, B pohybovalo co nejrychleji. V následujícím odstavci si uvedeme, jak kritérium optimality vhodně definovat a jak formulovat úlohu optimálního řízení.

Definice 1.6. K řízené soustavě $\dot{x} = f(x(t), u(t))$ a počáteční podmínce $x(0) = A$ definujeme účelovou funkci $f_0(x(t), u(t))$, která je spojitá jak ve (vektorové) proměnné $x(t)$, tak ve (vektorové) proměnné $u(t)$. K ní pak definujeme účelový funkcionál J následovně:

$$J = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt.$$

Poznámka 1.3. Pokud položíme $f_0(x(t), u(t)) \equiv 1$, pak je účelový funkcionál tvaru:

$$J = \int_0^T 1 dt = T.$$

Takto definovaný účelový funkcionál se obvykle minimalizuje a používá se ve formulaci úlohy nejrychlejšího průjezdu, kterou uvedeme v podkapitole 1.3. Značení v této podkapitole odpovídá značení v [6].

Formulace základní úlohy optimálního řízení. Necht' $A, B \in X$ jsou dané body fázového prostoru vozidla. Mezi všemi (přípustnými) regulacemi $u(t)$ převádějícími bod A do bodu B hledáme takovou, pro niž účelový funkcionál

$$J = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt$$

nabývá nejmenší možné hodnoty. Přitom $x(t)$ je řešením řízené soustavy (1.2). Jestliže taková regulace existuje, nazveme ji optimální regulací a označíme ji jako $\hat{u}(t)$. Řešení $x(t)$ pak nazveme odpovídající (fázovou) trajektorií a označíme jej $\hat{x}(t)$.

1.2 Motivační úloha

V této podkapitole využijeme základních pojmů teorie optimálního řízení definovaných v podkapitole 1.1. Cílem této podkapitoly není úlohu nejrychlejšího průjezdu vozidla z bodu A do bodu B precizně zavést a zformulovat. V této podkapitole úlohu spíše nastíníme a zaměříme se především na odvození diferenciálních rovnic popisujících pohyb vozidla a na definování oboru regulace U .

Uvažujme následující optimalizační úlohu. Vozidlo se pohybuje po závodní dráze (v celé práci uvažujeme pouze případ dráhy dané v rovině a neuvažujeme převýšení). Má se dostat z bodu A do bodu B za co nejmenší čas pomocí regulovaného pohybu. Regulovaným pohybem máme na mysli pohyb, který je ovlivněn tzv. regulacemi (viz definice 1.1), které v naší práci modelujeme veličinami závislými na čase: $a(t), \rho(t)$. Regulace $a(t)$ je podélné (tečné) zrychlení, které modeluje zrychlování či brzdění vozidla v čase t a regulace $\rho(t)$ je míra natočení volantu v čase t . Obor regulace pro tuto motivační úlohu uvedeme na konci této podkapitoly.

Dráhu uvažujme jako následující množinu bodů v rovině $D \subset \mathbb{R}^2$:

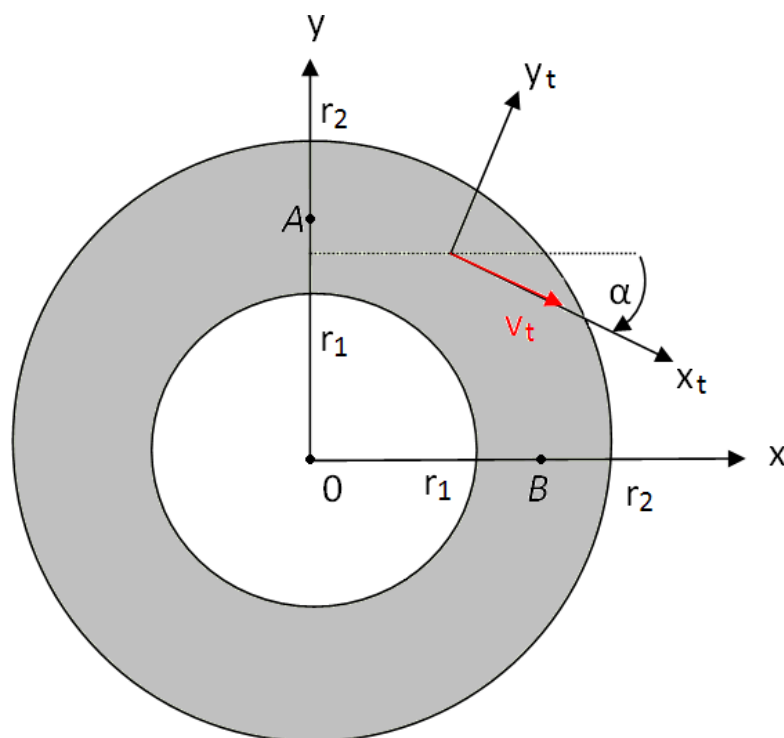
$$D = \{(x, y) : r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\}.$$

Jedná se tedy o mezikruží (viz obrázek 1.1), které si můžeme představit jako jednoduchý model základního závodního okruhu (viz např. Indianapolis). Počáteční bod $A \in D$ volme

$$A = [x_0, y_0] = \left[0, \frac{r_1 + r_2}{2}\right]$$

a koncový bod $B \in D$ volme:

$$B = [x_T, y_T] = \left[\frac{r_1 + r_2}{2}, 0\right].$$



Obr 1.1. Model základního závodního okruhu.

Zavedme (dle obrázku 1.1) globální souřadný systém (x, y) s počátkem ve středu dráhy, tzn. ve středu mezikruží D . Vozidlo uvažujeme jako hmotný bod. Vozidlo má v každém okamžiku jistou rychlost. Rychlost je v souřadném systému určena svoji velikostí a svým směrem. Velikost rychlosti označíme symbolem v a v celé práci (pokud to bude v kontextu zřejmé) budeme místo termínu velikost rychlosti používat kratší termín rychlost.

Ke globálnímu souřadnému systému (x, y) zavedme ještě lokální souřadný systém (x_t, y_t) následovně: osa x_t lokálního souřadného systému je rovnoběžná s rychlostí v . Osa y_t je vzhledem k ose x_t pootočená o úhel $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček (viz obrázek 1.1). Počátek lokální souřadné soustavy je totožný s těžištěm vozidla (hmotným bodem). Protože vozidlo se v čase pohybuje (vzhledem ke globálnímu souřadnému systému) rychlostí v , též lokální souřadný systém se (společně s vozidlem) v závislosti na čase pohybuje rychlostí v vzhledem ke globálnímu souřadnému systému.

Vozidlo se tedy z pohledu globální souřadné soustavy pohybuje rychlostí v ve směru osy x_t . Průmět této rychlosti do globální souřadné soustavy definuje rychlost vozidla ve směru osy x a y takto:

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \alpha, \\ v_y &= v \sin \alpha, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde α je úhel, o který je lokální souřadný systém (x_t, y_t) pootočen vzhledem ke globálnímu souřadnému systému (x, y) . Kladný směr otočení je proti směru hodinových ručiček. V následující části uvedeme čtyři diferenciální rovnice popisující pohyb vozidla.

Zavedení první diferenciální rovnice. Rychlost v je funkcí času t . Tuto skutečnost budeme vyjadřovat zápisem $v(t)$. Definujme přírůstek rychlosti $v(t)$ za jednotku času jako tečné zrychlení $a(t)$. Toto zrychlení a budeme v práci často zkráceně nazývat jen zrychlením. První diferenciální rovnice popisující pohyb hmotného bodu je tedy dána následující rovnicí:

$$\dot{v}(t) = a(t).$$

Odvození druhé diferenciální rovnice. Vozidlo má možnost zatáčet. Míra natočení volantu vozidla, kterou označíme symbolem ρ , definuje kružnici o poloměru R , po které by se vozidlo pohybovalo, kdyby míra natočení volantu byla konstantní. Definujme tedy míru natočení volantu ρ jako převrácenou hodnotu poloměru R :

$$\rho = \frac{1}{R}.$$

Poznamenejme, že takto námi definovaná míra natočení volantu ρ se v literatuře věnované diferenciální geometrii (viz např. [7]) často označuje jako křivost křivky v bodě. Proto budeme míru natočení volantu ρ v této práci někdy nazývat zkráceně jen jako křivost. Zdůrazněme, že ρ je funkcí času, tedy píšeme $\rho(t)$.

Jestliže se vozidlo zároveň pohybuje rychlostí $v(t)$ a zároveň zatáčí s křivostí $\rho(t)$, pak se v čase t mění i úhel α , který svírá lokální a globální souřadný systém. Vidíme tedy, že i úhel α je funkcí času t a píšeme $\alpha(t)$.

Nyní odvodíme vztah mezi $\alpha(t)$ a $\rho(t)$. Uvažujme kružnici o poloměru R a obvodu $o = 2\pi R$. Pohybuje-li se po ní vozidlo rychlostí v , tak za přírůstek času Δt urazí na kružnici vzdálenost $\Delta o = v\Delta t$. Směr rychlosti v se za tento čas Δt změní o úhel α takto:

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{\Delta o}{o} = 2\pi \frac{v\Delta t}{2\pi R}.$$

Úpravou a dělením této rovnice (nenulovým) časem Δt dostáváme rovnici:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{v}{R}.$$

Jelikož $\rho = \frac{1}{R}$, upravíme rovnici na tvar:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \rho v.$$

Protože ρ, v, α jsou funkce času, píšeme dále $\rho(t), v(t), \alpha(t)$. Tedy:

$$\frac{\Delta\alpha(t)}{\Delta t} = \rho(t)v(t).$$

Výraz na levé straně rovnice pro $\Delta t \rightarrow 0$ přejde v derivaci podle času:

$$\frac{\Delta \alpha(t)}{\Delta t} = \dot{\alpha}(t),$$

čímž dostáváme diferenciální rovnici popisující vztah mezi $\alpha(t)$ a $\rho(t)$ následovně:

$$\dot{\alpha}(t) = \rho(t)v(t).$$

Zavedení třetí a čtvrté diferenciální rovnice. Poslední dvě rovnice popisují vztah mezi souřadnicemi (polohou) vozidla x, y a rychlostí v v čase. Souřadnice x, y jsou funkcí času, píšeme tedy $x(t), y(t)$. Jejich časová změna je definována jako rychlost v globálním souřadném systému:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_x(t), \\ \dot{y}(t) &= v_y(t).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Do vztahů (1.4) dosadíme z rovnic (1.3). Rovnice pak mají tvar:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t)\cos \alpha(t), \\ \dot{y}(t) &= v(t)\sin \alpha(t).\end{aligned}$$

Celkově jsme tak sestavili soustavu čtyř obyčejných diferenciálních rovnic popisující pohyb vozidla:

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= a(t), \\ \dot{\alpha}(t) &= \rho(t)v(t), \\ \dot{x}(t) &= v(t)\cos \alpha(t), \\ \dot{y}(t) &= v(t)\sin \alpha(t).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Tato soustava tak tvoří řízenou soustavou (viz definice 1.2) naši motivační úlohy a $a(t)$ a $\rho(t)$ vystupující v soustavě jsou regulace.

K řízené soustavě diferenciálních rovnic (1.5) definujeme počáteční podmínky (viz definice 1.3), charakterizující stav vozidla v čase $t = 0$, kdy se vozidlo nachází v bodě A :

$$v(0) = v_0, \alpha(0) = \alpha_0, x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

V posledním odstavci této podkapitoly zavedeme podmínky charakterizující obor regulace. Definování oboru regulace je velice důležité. Kdybychom regulace $a(t), \rho(t)$ v úloze nevolili z oboru regulace, ale volili bychom je bez omezení, řešení úlohy by neodpovídalo fyzikální realitě (např. vozidlo by mohlo projíždět zatáčku rychleji, než umožňuje tření pneumatik o vozovku, atd.).

Zavedení oboru regulace. Regulace kromě uvedené soustavy čtyř ODR1 podléhají dalším fyzikálním omezením. Tato fyzikální omezení vymezují obor regulace (viz definice 1.1). Pro jednoduchost modelu se omezíme na následující podmínky.

- 1) Zatáčení vozidla je omezeno maximálním natočením volantu, což odpovídá tomu, že vozidlo se může pohybovat po křivce s omezenou křivostí. Tuto skutečnost modelujeme podmínkou:

$$-\rho_{MAX} \leq \rho \leq \rho_{MAX} . \quad (1.6)$$

- 2) Podélné zrychlení (ať už se jedná o zrychlení či brzdění) je omezeno přilnavostí pneumatik k vozovce. Tuto fyzikální podmínku lze zjednodušeně zapsat pomocí nerovnice:

$$-g\xi \leq a \leq g\xi ,$$

kde g je gravitační zrychlení a ξ je součinitel smykového tření. Hodnota ξ je závislá na mnoha faktorech (typ a teplota pneumatik, materiál a drsnost vozovky, mokrost vozovky...) a stanovuje se experimentálně. Hodnoty ξ se u závodních aut na okruhu za dobrých podmínek obvykle pohybují v rozpětí $\xi \in (1,2)$ (některé hodnoty součinitele smykového tření lze nalézt např. v [8]). Pro jednoduchost modelu uvažujeme $\xi = 1$. Nerovnice modelující tuto skutečnost je pak tvaru:

$$-g \leq a \leq g. \quad (1.7)$$

- 3) Kombinace podélního a odstředivé zrychlení nesmí z fyzikálního hlediska překročit maximální možné zrychlení dané přilnavostí pneumatik k vozovce, platí omezení:

$$a_{do}^2 + a^2 \leq g^2 \xi^2 ,$$

kde dostředivé zrychlení je dáno vztahem:

$$a_{do} = v^2 \rho .$$

Dosazením za dostředivé zrychlení a volbou $\xi = 1$ dostáváme následující omezení:

$$v^4 \rho^2 + a^2 \leq g^2 . \quad (1.8)$$

- 4) Aby průběh regulací byl dostatečně hladký, je vhodné přidat ještě podmínky hladkosti omezující derivace regulací:

$$|\dot{\rho}(t)| \leq \rho_{\Delta MAX} , \quad (1.9)$$

$$|\dot{a}(t)| \leq a_{\Delta MAX} , \quad (1.10)$$

kde $\rho_{\Delta MAX}$, $a_{\Delta MAX}$ jsou vhodně zvolené konstanty. Konstanta $a_{\Delta MAX}$ modeluje schopnost vozidla měnit intenzitu zrychlování (brzdění), konstanta $\rho_{\Delta MAX}$ modeluje schopnost řidiče měnit směr vozidla.

Naším úkolem je nalézt takové regulace $a(t), \rho(t), t \in \langle 0, T \rangle$ vyhovující jednak řízené soustavě ODR1 (1.5) a jednak uvedeným podmínkám oboru regulace (1.6) - (1.10) tak, aby regulace zajistily, že se vozidlo dostane z bodu A do bodu B v co nejmenším čase T . V následující podkapitole tuto motivační úlohu budeme formulovat přesněji.

1.3 Úloha nejrychlejšího průjezdu jako úloha optimálního řízení

Motivační úlohu minulé podkapitoly budeme dále nazývat jako úlohu nejrychlejšího průjezdu. V této podkapitole motivační úlohu přeznačíme a přeformulujeme ve shodě se značením a pojmy uvedenými v první podkapitole této práce. Nejprve přeznačíme regulace a proměnné – viz následující tabulka 1.1.

ρ	a	v	α	x	y
u_1	u_2	x_1	x_2	x_3	x_4

Tab. 1.1. Přeznačení regulací a proměnných.

S využitím nového přeznačení uvažujme dále fázový prostor proměnných $X \subset \mathbb{R}^4$, kde prvek $x \in X$ je vektorová proměnná $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Tato vektorová proměnná je závislá na čase, značíme ji tedy $x = x(t)$ a zachycuje rychlost, natočení a polohu vozidla v závislosti na čase t . V našem případě je fázový prostor dán nerovnicemi omezujícími proměnné x_i v každém časovém okamžiku $t \in \langle 0, T \rangle$:

$$0 \leq x_1,$$

$$0 \leq x_2 < 2\pi,$$

$$r_1^2 \leq x_3^2 + x_4^2 \leq r_2^2.$$

Dále předpokládejme, že pohyb vozidla lze regulovat. To lze ve shodě s definicí 1.1 zachytit regulací u :

$$u = u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in U \subset \mathbb{R}^2.$$

Obor regulace U je v našem případě vymezen podmínkami (1.6) - (1.10), které mají po přeznačení tvar:

$$-c_1 \leq u_1 \leq c_1, \quad (1.11)$$

$$-c_2 \leq u_2 \leq c_2, \quad (1.12)$$

$$x_1^4 u_1^2 + u_2^2 \leq c_1^2, \quad (1.13)$$

$$-c_3 \leq \dot{u}_1 \leq c_3, \quad (1.14)$$

$$-c_4 \leq \dot{u}_2 \leq c_4, \quad (1.15)$$

kde $c_1 = \rho_{MAX}$, $c_2 = g$, $c_3 = \rho_{\Delta MAX}$, $c_4 = a_{\Delta MAX}$ jsou konstanty. Pohyb vozidla je dán dle definice 1.2 řízenou soustavou ODR1:

$$\dot{x} = f(x, u),$$

která byla odvozena v minulé podkapitole a je v našem případě tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 \cdot u_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1 \cdot \cos x_2, \\ \dot{x}_4 &= x_1 \cdot \sin x_2.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Uvažujme dále body fázového prostoru $A, B \in X$. Ve shodě s definicí 1.3 přidejme k řízené soustavě ještě počáteční podmínku

$$x(0) = A.\tag{1.17}$$

Protože úloha nejrychlejšího průjezdu je úlohou časové optimalizace, zavedme k řízené soustavě (1.16) ve shodě s definicí 1.6 účelovou funkci

$$f_0(x(t), u(t)) \equiv 1$$

a k ní definujme patřičný účelový funkcionál

$$J = \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt = \int_0^T 1 dt = T.$$

Definujme ještě koncovou podmínku:

$$x(T) = B\tag{1.18}$$

Formulace úlohy nejrychlejšího průjezdu: S využitím definice 1.4 a definice 1.5 o přípustných regulacích a regulacích převádějících bod A do bodu B formulujme nyní úlohu nejrychlejšího průjezdu takto: Mezi všemi regulacemi $u(t)$ z oboru regulace U , daného podmínkami (1.11) – (1.15), převádějícími bod A do bodu B , tj. existuje řešení soustavy (1.16) a platí současně (1.17) i (1.18), hledáme takovou regulaci $u(t)$, pro kterou účelový funkcionál $J = T$ nabývá nejmenší hodnoty.

Poznámka 1.4. Body A a B fázového prostoru X uvažujeme následovně:

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = (v_0, \alpha_0, x_0, y_0),$$

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (v_T, \alpha_T, x_T, y_T).$$

Písmeny A, B jsme na obrázku 1.1 značili body dráhy D , zde stejnými písmeny značíme body fázového prostoru, který je jistým zobecněním dráhy D . Při zadání (počáteční) rychlosti v_0 , počátečního natočení α_0 vozidla v bodě $[x_0, y_0]$ dráhy (viz obrázek 1.1) je bod $A[v_0, \alpha_0, x_0, y_0]$ fázového prostoru plně určen. Pokud bychom ovšem koncovou rychlost v_T nebo koncové natočení α_T vozidla v bodě $[x_T, y_T]$ dráhy nezadali, bod $B[v_T, \alpha_T, x_T, y_T]$ fázového prostoru už by plně určen nebyl. Jednalo by se tak o tzv. úlohu s pohyblivým pravým koncem. Takovou úlohu je pak třeba opatřit podmínkami transversality, viz např. [6].

1.4 Řešitelnost úlohy optimálního řízení

V této podkapitole nastíníme problematiku analytické řešitelnosti úlohy optimálního řízení. Ústřední větou optimálního řízení je tzv. Pontrjaginův princip maxima, který, jak si ukážeme, za jistých podmínek odpoví na otázku existence a jednoznačnosti řešení úlohy.

Pontrjaginův princip maxima lze zavést jak pro obecnou úlohu (optimálního řízení), tak speciálně pro úlohu časové optimalizace. V naší práci budeme uvažovat pouze tuto speciální úlohu, proto princip maxima v této práci uvedeme pouze pro úlohu časové optimalizace.

K řízené soustavě (1.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m).\end{aligned}$$

zavedme soustavu pro pomocné proměnné $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x, u) \varphi_k, \\ &\dots \\ \dot{\varphi}_n &= - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x, u) \varphi_k.\end{aligned}$$

Označme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $f(x, u) = (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u))$ a zavedme Hamiltonovu funkci následujícím způsobem:

$$H = H(\varphi, f(x, u)) = \sum_{k=1}^n \varphi_k f_k(x, u).$$

Ze zavedení Hamiltonovy funkce vyplývá, že řízenou soustavu (1.1) i uvedenou soustavu pro pomocné proměnné lze napsat jednotně ve tvaru Hamiltonovy soustavy:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, & i &= 1, \dots, n, \\ \dot{\varphi}_i &= - \frac{\partial H}{\partial x_i}, & i &= 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Věta (princip maxima pro úlohu časové optimalizace). Ve fázovém prostoru X jsou dány body a, b . Předpokládejme, že $\hat{u}(t)$, $t \in \langle 0, \hat{T} \rangle$ je regulace převádějící vozidlo z bodu a do bodu b v nejkratším čase a $\hat{x}(t)$, $t \in \langle 0, \hat{T} \rangle$ je odpovídající (fázová) trajektorie. Pak na $\langle 0, \hat{T} \rangle$ existuje spojitě nenulové řešení $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ soustavy

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}(\varphi, \hat{x}, \hat{u}), \quad i = 1, \dots, n$$

takové, že Hamiltonova funkce H splňuje pro všechna $t \in \langle 0, \hat{T} \rangle$ podmínku maxima

$$H(\varphi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in U} H(\varphi(t), \hat{x}(t), u(t)),$$

kde U je obor regulace. Navíc na $\langle 0, \hat{T} \rangle$ platí (c je konstanta)

$$H(\varphi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = c \geq 0.$$

Poznámka 1.5. Dle uvedené věty dává princip maxima pro existenci optimální regulace \hat{u} a odpovídající trajektorie \hat{x} podmínku nutnou, nikoliv postačující. V případě, že by řízená soustava $f(x, u)$ byla lineární, tj. měla tvar:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1, \dots, + b_{1m}u_m, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1, \dots, + b_{nm}u_m, \end{aligned}$$

který zkráceně zapíšeme pomocí matic A a B jejichž prvky jsou výše uvedené koeficienty:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

by princip maxima byl podmínkou nejen nutnou, ale i postačující. Navíc soustava

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}(\varphi, \hat{x}, \hat{u}), \quad i = 1, \dots, n,$$

by taktéž byla lineární a nezávisela ani na \hat{x} ani na \hat{u} a mohli bychom ji zkráceně vyjádřit ve tvaru

$$\dot{\varphi} = -A^T \varphi.$$

Obsah poznámky 1.5 a důkaz principu maxima pro lineární úlohu časové optimalizace lze nalézt v např. v [6]. Více se o úlohách časové optimalizace lze dočíst např. v [13].

V úloze nejrychlejšího průjezdu, jak jsme ji odvodili v minulé podkapitole, je řízená soustava $\dot{x} = f(x, u)$ bohužel nelineární. Podmínka maxima tak není pro existenci řešení podmínkou postačující, ale jen podmínkou nutnou. Dále bychom se při snaze najít optimální regulaci vyhovující principu maxima museli vypořádat s řešením nelineární soustavy diferenciálních rovnic – nelinearita je jednak v řízené soustavě $\dot{x} = f(x, u)$, tak i v soustavě

$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}(\varphi, \hat{x}, \hat{u})$, která je součástí Hamiltonovy soustavy. Řešení soustav nelineárních diferenciálních rovnic většinou nelze nalézt analyticky. Proto se budeme snažit úlohu nejrychlejšího průjezdu vhodným způsobem diskretizovat a převést ji tak z úlohy optimálního řízení na úlohu nelineárního programování, kterou už budeme moci vhodným softwarem numericky řešit. V následující podkapitole uvedeme základní pojmy z teorie nelineárního programování.

1.5 Zavedení základních úloh nelineárního programování

V této podkapitole zmíníme základní pojmy z teorie optimalizace, speciálně úlohu nelineárního programování. V literatuře věnované teorii optimalizace se často setkáváme s odlišným značením proměnných a funkcí než v literatuře optimálního řízení. Zejména vektorové proměnné se v optimalizaci značí tučně a uvažují se jako sloupcové vektory, proto se u nich často vyskytuje symbol transpozice, např. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$. Kdežto v optimálním řízení se často setkáváme se značením jednodušším: $x = (x_1, \dots, x_n)$. Obdobně vektorovou funkci vektorové proměnné je v optimalizaci zvykem značit symbolem $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, kdežto v optimálním řízení značíme jen $f(x)$. Často je z kontextu sice zřejmé, jestli se jedná o proměnnou, (resp. funkci) vektorovou či skalární, ale i přesto někdy značení v práci okomentujeme. Kvůli přehlednosti budeme v práci užívat jednotné značení - přikloníme se ke značení podle konvencí v teorii optimálního řízení.

Definice 1.7. Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce vektorové proměnné a $S \subset \mathbb{R}^n$. Pak úlohu:

$$\min_x \{f(x) | x \in S\}$$

nazveme úlohou matematického programování.

Poznámka 1.6. Úloha matematického programování může mít různé speciální podoby. Jedna z nich je úloha lineárního programování. Obecně se pak jedná o úlohu nelineárního programování. Tyto dvě úlohy jsou předmětem následujících dvou definic.

Definice 1.8. Nechť c je reálný (řádkový) vektor dimenze n a b je reálný (sloupcový) vektor dimenze m . Nechť A je reálná matice typu $m \times n$. Symbolem 0 rozumíme nulový (sloupcový) vektor dimenze n . Pak úlohu:

$$\min_x \{cx | Ax = b, x \geq 0\}$$

nazveme úlohou lineárního programování ve standardním tvaru.

Definice 1.9. Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$. Označme dále $\circ \in \{\leq, \geq, =\}^m$. Symbolem 0 rozumíme nulový vektor dimenze m . Pak úlohu:

$$\min_x \{f(x) | g(x) \circ 0, x \in X\}$$

nazveme úlohou nelineárního programování.

Poznámka 1.7. Pokud bychom ve formulaci úlohy matematického programování uvažovali množinu $S = \{x \in X | g(x) \leq 0\}$ jako konvexní a funkci $f(x)$ též konvexní, jednalo by se tak o úlohu konvexního programování. Tato úloha tvoří speciální typ úlohy nelineárního programování. Podobnými podmínkami lze vymezit i jiné speciální úlohy (úlohu kvadratického programování aj.). Pro různé typy těchto speciálních úloh existují různé algoritmy, které je řeší.

Tato práce je zaměřena aplikačně, proto jejím cílem je formulovat úlohu nejrychlejšího průjezdu jako úlohu nelineárního programování a následně tuto úlohu řešit v softwaru GAMS, ve kterém jsou implementovány mnohé numerické algoritmy určené k řešení různých optimalizačních úloh, mj. úloh nelineárního programování. V následující kapitole se budeme věnovat transformaci úlohy nejrychlejšího průjezdu (formulované jako úlohu optimálního řízení) na úlohu nelineárního programování.

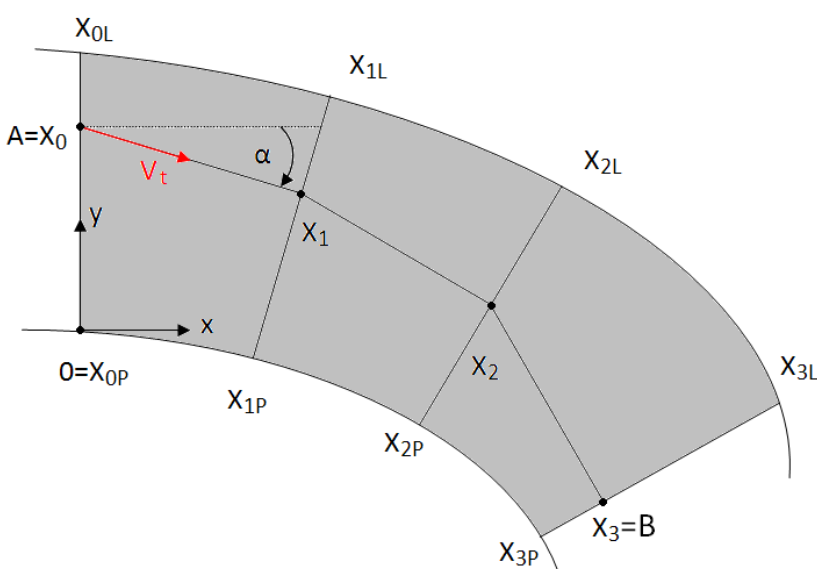
2. Transformace úlohy optimálního řízení na úlohu nelineárního programování

Abychom mohli úlohu zpracovávat na počítači, je potřeba data úlohy reprezentovat konečným počtem čísel. Proto lze tímto způsobem zpracovávat úlohu nelineárního programování, jejímž řešením je vektor čísel (viz definice 1.9), který je konečně rozměrným objektem. Řešíme-li úlohu optimálního řízení, např. takovou, jakou jsme formulovali v podkapitole 1.3, pak řešením takové úlohy je regulace. Z tohoto důvodu se v následujícím textu této kapitoly budeme zabývat otázkou, jak úlohu optimálního řízení převést na úlohu nelineárního programování.

Nejprve je třeba úlohu a její data vhodně diskretizovat. V této práci budeme uvažovat prostorovou diskretizaci inspirovanou [3], kterou si ukážeme na ilustrativním příkladu (viz obrázek 2.1). Prostorová diskretizace je vhodnější než časová diskretizace, neboť data úlohy i její řešení pak budou explicitně závislá na prostoru, nikoli čase (jistě je pro automobilového závodníka vhodnější, aby měl k dispozici např. informaci spíše o tom, v jakém místě má před danou zatáčkou začít brzdit než v jakém čase má brzdit). Další možnosti diskretizace úloh (nejen) optimálního řízení nabízí [2] nebo [5].

2.1 Zavedení úvodních pojmů

Fázové souřadnice (velikost tečné rychlosti v , úhel natočení α) a regulace (míra natočení volantu ρ a tečné zrychlení a) budeme dále uvažovat jako funkce prostoru, nikoli času. Levý (z pohledu řidiče) okraj dráhy pokryjeme $n + 1$ body, které označíme $X_{0L}, X_{1L}, \dots, X_{nL}$. Toto pokrytí nemusí být ekvidistantní. Obdobně $n + 1$ body $X_{0P}, X_{1P}, \dots, X_{nP}$ pokryjeme i pravý okraj dráhy (viz obrázek 2.1). Odpovídající si body levého a pravého okraje dráhy spojíme úsečkami, čímž dráhu D rozdělíme na n úseků.



Obr. 2.1. Prostorová diskretizace.

Body dráhy uvažujeme jako prvky prostoru \mathbb{R}^2 a značíme je velkými písmeny. Složky těchto bodů pak značíme malými písmeny x a y , které opatříme odpovídajícími indexy. Např. bod X_0 zapíšeme po složkách následovně:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Poznámka 2.1. Intuitivní zavedení dráhy pomocí bodů na jejím pravém i levém okraji je velice výhodné, neboť tak umožňuje definovat dráhu, která má např. nekonstantní šířku nebo nekonstantní křivost, která navíc nemusí být ani vyjádřena pomocí jednoduchého analytického předpisu, ale na základě empirických nebo simulovaných dat. Definice dále umožňuje snadno zavést ne-ekvidistantní diskretizaci dráhy, tzn. lze „hustě“ diskretizovat např. oblast zatáčky a „řídce“ diskretizovat přehledný úsek vozovky – např. rovinku.

Pohyb vozidla po dráze D definujeme jako posloupnost bodů X_0, X_1, \dots, X_n , kde každý z bodů posloupnosti vyjádříme jako lineární kombinaci pravého a levého bodu okraje vozovky následujícím způsobem:

$$X_i = X_{iP} + k_i(X_{iL} - X_{iP}), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

kde $k_i \in \langle 0, 1 \rangle$.

Počáteční bod A ztotožníme s počátečním bodem posloupnosti ($A = X_0$) a koncový bod B ztotožníme s posledním bodem posloupnosti ($B = X_n$).

Posloupnost bodů X_0, X_1, \dots, X_n tak definuje pohyb vozidla po dráze D . Tuto posloupnost budeme reprezentovat posloupností číselných parametrů k_0, k_1, \dots, k_n , které budeme dále nazývat parametry polohy. Vozidlo se tak po dráze pohybuje po trajektorii, kterou je lomená čára. Pro popis této trajektorie zavedeme reálný délkový parametr s z intervalu $s \in \langle 0, n \rangle$. Každý bod X této křivky (lomené čáry) pak vyjádříme pomocí parametru prostoru s takto:

$$X(s) = X_{s^{min}} + (s - s^{min})(X_{s^{max}} - X_{s^{min}}), \quad s \in \langle 0, n \rangle,$$

kde s^{min} je největší přirozené číslo (včetně nuly), pro které platí $s^{min} \leq s$ a s^{max} je nejmenší přirozené číslo, pro které platí $s \leq s^{max}$.

Příklad. Pro hodnotu parametru $s = 2,3$ je $s^{min} = 2$ a $s^{max} = 3$ a bod $X(2,3)$ pak vyjádříme jako $X(2,3) = X_2 + 0,3(X_3 - X_2)$.

Poznámka 2.2. Zavedení délkového parametru s je praktické pro to, abychom data úlohy, její řešení a také rovnice popisující pohyb vozidla mohli vyjádřit nikoli v závislosti na čase t ale v závislosti na parametru s .

Regulaci ρ definujeme jako posloupnost čísel ρ_1, \dots, ρ_n . Obdobně definujeme i regulaci a - jako posloupnost čísel a_0, a_1, \dots, a_n . Regulace ρ a a uvažujeme jako funkce parametru s (píšeme $\rho(s), a(s)$), které jsou po částech konstantní. Obě regulace se mohou podél

trajektorie skokově měnit pouze v bodech X_0, X_1, \dots, X_n a mezi těmito body nemění svou hodnotu. Regulace $\rho(s)$ a regulace $a(s)$ definujeme následovně:

$$\rho(s) = \rho_s^{max}, \quad s \in \langle 0, n \rangle,$$

$$a(s) = a_s^{max}, \quad s \in \langle 0, n \rangle,$$

kde s^{max} je nejmenší přirozené číslo s vlastností $s \leq s^{max}$.

2.2. Převedení závislosti rovnic z času na parametr prostoru

V této podkapitole se budeme zabývat převodem již odvozené (viz podkapitola 1.2 Motivační úloha) soustavy diferenciálních rovnic (1.5) popisující stav (pohyb) vozidla v závislosti na čase t , na soustavu diferenciálních rovnic popisující stav vozidla v závislosti na parametru s . Tyto diferenciální rovnice pak převedeme na rovnice diferenční popisující stav vozidla pouze v bodech trajektorie X_0, X_1, \dots, X_n – tzn. místo parametru s budeme v rovnicích používat odpovídající index $X(0) = X_0, X(1) = X_1, \dots, X(n) = X_n$.

Připomeňme si soustavu diferenciálních rovnic (1.5) popisující stav (pohyb) vozidla v závislosti na čase t :

$$\dot{v}(t) = a(t)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \rho(t)v(t)$$

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos \alpha(t)$$

$$\dot{y}(t) = v(t)\sin \alpha(t)$$

Označení. V této práci symbolem tečky nad proměnnou (např. \dot{v}) značíme výhradně derivace podle času t . Tuto označení jsme zavedli již v definici 1.2. Derivaci podle parametru s budeme v práci značit výhradně symbolem čárky (tzn. v') a tím docílíme kompaktnosti zápisu, který nebude na úkor jeho srozumitelnosti.

Vozidlo má v čase t rychlost $v(t)$. V daném čase t se vozidlo vyskytuje v bodě trajektorie X_s , kterému odpovídá jistá hodnota parametru s . První rovnice vyjadřuje skutečnost, že v jistém čase t má vozidlo tečné zrychlení $a(t)$ rovné (časové) derivaci (tečné) rychlosti $\dot{v}(t)$. Tuto rovnici převedeme nyní na diferenciální rovnici popisující vztah tečného zrychlení $a(s)$ v bodě trajektorie X_s a derivace (podle parametru s) tečné rychlosti $v'(s)$ pomocí následujících úvah.

Uvažujeme-li a jako funkci parametru s , pak pravou stranu rovnice upravíme snadno:

$$a(t) = a(s).$$

Levou stranu rovnice upravíme následovně:

$$\dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(s)}{dt} = \frac{dv(s)}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{dv(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v'(s) \cdot v(s).$$

Složením předcházejících dvou úprav dostáváme diferenciální rovnici:

$$v'(s) = \frac{a(s)}{v(s)}. \quad (2.2)$$

Obdobnou úvahou upravíme i druhou rovnici. Uvažujeme-li ρ i v jako funkce parametru s , pak pravou stranu rovnice upravíme opět snadno:

$$\rho(t)v(t) = \rho(s)v(s).$$

Levou stranu rovnice upravíme následovně:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d\alpha(s)}{dt} = \frac{d\alpha(s)}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \alpha'(s) \cdot v(s).$$

Opět složením předcházejících úprav dostáváme diferenciální rovnici:

$$\alpha'(s) = \rho(s). \quad (2.3)$$

Poznámka 2.3. Všimněme si, že v rovnicích (2.2) i (2.3) není vzhledem k tomu, jak jsme definovali regulaci ρ a a , zaručena spojitost derivace rychlosti $v(s)$ ani úhlu natočení $\alpha(s)$. Spojitost derivací může být porušena v bodech X_1, \dots, X_{n-1} trajektorie, kde se jak regulace $\rho(s)$, tak regulace $a(s)$ můžou skokově měnit. Pohybuje-li se vozidlo po nějaké trajektorii, pak rychlost i směr rychlosti se sice mění spojitě, ale v bodech nespojitosti derivací těchto veličin dochází ke skokům, což si lze představit jako „nekonečně“ prudké sešlápnutí brzdového/plynového pedálu resp. „nekonečně rychlé“ šknutí volantem. Obě rovnice ale uvádíme v této formě kvůli názornosti a snadné interpretaci.

2.3. Převod soustavy rovnic diferenciálních na diferenční

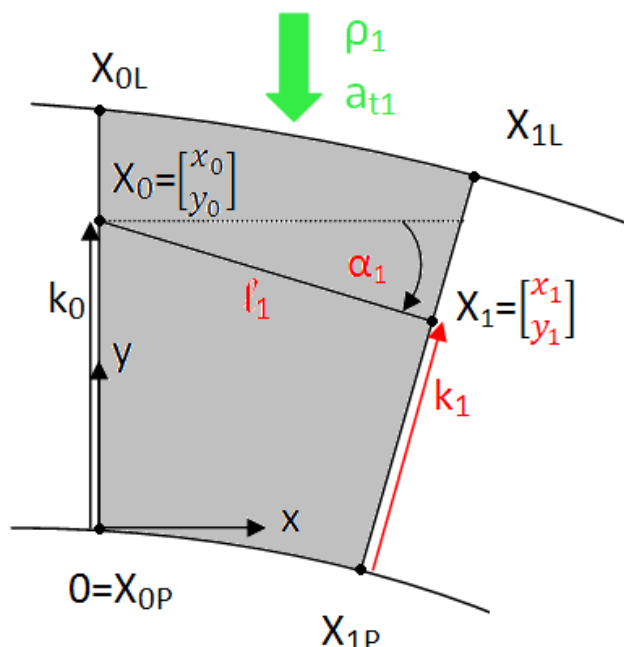
Soustavu (1.5) diferenciálních rovnic závislých na čase t se nám v minulé podkapitole podařilo částečně převést na soustavu diferenciálních rovnic závislých na parametru s . V této podkapitole navážeme a soustavu rovnic diferenciálních přepíšeme na rovnice diferenční. Poslední dvě rovnice soustavy (1.5):

$$\dot{x}(t) = v(t)\cos\alpha(t),$$

$$\dot{y}(t) = v(t)\sin\alpha(t)$$

popisující změnu polohy vozidla v čase t neupravíme obdobně, jak jsme upravili první dvě rovnice soustavy - kdy jsme původní diferenciální rovnici (v závislosti na čase t přepsali na

diferenciální rovnici v závislosti na parametru s). K těmto dvěma rovnicím přistoupíme jinak – převedeme je rovnou na rovnice diferenční. Původní diferenciální rovnice vyjadřují změnu polohy vozidla v čase t . Rovnice převedeme na diferenční rovnice popisující změnu polohy vozidla při přechodu z bodu X_{i-1} do bodu X_i (tzn. při změně parametru z hodnoty $s - 1$ na hodnotu s). Pro názornost si převod znázorníme na obrázku 2.2 pro konkrétní případ $i = 1$, tedy přechod z bodu X_0 do bodu X_1 .



Obr. 2.2. Převod na diferenční rovnice.

Pro bod X_i se složkami $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ platí již rovnice (2.1):

$$X_i = X_{iP} + k_i(X_{iL} - X_{iP}).$$

Tuto rovnici prepíšeme po složkách na soustavu 2 rovnic:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{iP} \\ y_{iP} \end{bmatrix} + k_i \left(\begin{bmatrix} x_{iL} \\ y_{iL} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{iP} \\ y_{iP} \end{bmatrix} \right).$$

Označíme-li l_i vzdálenost mezi bodem X_{i-1} a bodem X_i , pak bod X_i lze vyjádřit takto:

$$X_i = X_{i-1} + l_i \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix}.$$

Spojením této rovnice a rovnice (2.1) dostáváme soustavu rovnic:

$$X_i = X_{iP} + k_i(X_{iL} - X_{iP}),$$

$$X_{iP} + k_i(X_{iL} - X_{iP}) = X_{i-1} + l_i \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix},$$

kterou po složkách přepíšeme na tvar:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{iP} \\ y_{iP} \end{bmatrix} + k_i \left(\begin{bmatrix} x_{iL} \\ y_{iL} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{iP} \\ y_{iP} \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} x_{iP} \\ y_{iP} \end{bmatrix} + k_i \left(\begin{bmatrix} x_{iL} \\ y_{iL} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{iP} \\ y_{iP} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{bmatrix} + l_i \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \\ \sin \alpha_i \end{bmatrix}.$$

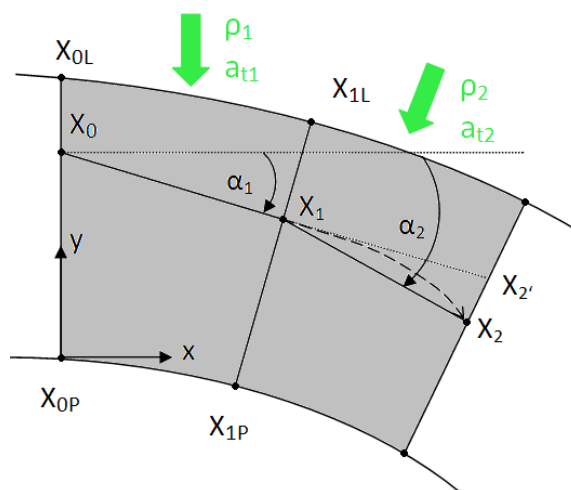
Pro přehlednost budeme v práci dále výhradně využívat následující ekvivalentní zápis právě uvedené soustavy:

$$\begin{aligned} x_i - x_{iP} &= k_i(x_{iL} - x_{iP}), \\ y_i - y_{iP} &= k_i(y_{iL} - y_{iP}), \\ x_{i-1} - x_{iP} &= k_i(x_{iL} - x_{iP}) - l_i \cos \alpha_i, \\ y_{i-1} - y_{iP} &= k_i(y_{iL} - y_{iP}) - l_i \sin \alpha_i. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Připomínáme, že soustavu jsme si odvodili pro přechod z bodu X_0 do bodu X_1 , tedy v uvedené soustavě (2.4) je $i = 1$, dále x_{iP} , y_{iP} , x_{iL} , y_{iL} jsou známé parametry a neznámé proměnné jsou: k_i , l_i , α_i , x_i , y_i , x_{i-1} , y_{i-1} . Při přechodu do bodu X_1 je obvykle znám stav v bodě X_0 . Za tohoto předpokladu by pak x_{i-1} , y_{i-1} byly známé parametry a uvedená soustava rovnic by pak obsahovala pět neznámých ale pouze 4 rovnice. Odvození další, páté, rovnice, kterou přidáme k soustavě (2.4) je poněkud delší, pro přehlednost práce jej proto uvádíme v následující samostatné podkapitole. V ní pak rozšířenou soustavu okomentujeme podrobněji.

2.4. Doplnění soustavy diferenčních rovnic

Nyní odvodíme vztah mezi úhly α_{i-1} a α_i a mírou natočení volantu ρ_i . Tento vztah bude tvořit pátou diferenční rovnici, kterou přidáme k soustavě (2.4) odvozené v minulé podkapitole. Pro názornost úvahu ukážeme pro úhly α_1 , α_2 a regulaci ρ_2 (viz obrázek 2.3).



Obr. 2.3. Odvození vztahu pro úhly α .

Vozidlo do bodu X_1 vjíždí pod úhlem α_1 . Kdyby se v bodě X_1 nastavila regulace $\rho_2 = 0$ a tato nulová regulace působila na vozidlo až do bodu X_2 , pak by vozidlo pokračovalo v přímém pohybu do bodu X_2 , po téže přímce, jako z bodu X_0 do bodu X_1 . Jenže jestliže na vozidlo mezi body X_1, X_2 bude působit nenulová regulace ρ_2 , vozidlo se od této přímky začne odklánět po kružnici o poloměru rovným převrácené hodnotě regulace ρ_2 a po této trajektorii vjede až do bodu X_2 . Do tohoto bodu ale už vjede pod úhlem α_2 . Díky tomu, že jsme trajektorii definovali jako lomenou čáru, nebudeme uvažovat pohyb mezi body X_1, X_2 jako pohyb po kružnici, ale abychom odvodili změnu toho úhlu ($\alpha_2 - \alpha_1$), aplikujeme na tento pohyb mezi body X_1, X_2 již odvozenou diferenciální rovnici (2.3), předpokládající pohyb po kružnici

$$\alpha'(s) = \rho(s),$$

kterou integrujeme od bodu X_1 do bodu X_2 , resp. od parametru s_1 do s_2 . Dostáváme vztah

$$\alpha(2) - \alpha(1) = \int_{s_1}^{s_2} \rho_2(s) ds,$$

kde $\alpha(2)$ je úhel, který svírá globální souřadný systém s trajektorií (lomenou čarou) mezi body X_1, X_2 (což je dle obrázku úhel α_2). Obdobně vidíme, že $\alpha(1) = \alpha_1$. Regulace $\rho_2(s)$ je mezi bodem X_1 a bodem X_2 konstantní, díky čemuž lze integrál pravé straně rovnice vyjádřit následovně:

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho_2(s) ds = \rho_2 \cdot l_2.$$

Složením předchozích úprav dostáváme diferenční rovnici:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \rho_2 \cdot l_2$$

Tuto rovnici snadno zobecníme pro obecné body:

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = \rho_i \cdot l_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nyní tuto rovnici připojíme k již odvozené soustavě diferenčních rovnic (2.4) a tuto soustavu rovnic zobecníme pro všechny body trajektorie. První dvě rovnice soustavy jsou definovány pro $i = 0, \dots, n$, zbývající tři rovnice jsou definovány pouze pro $i = 1, \dots, n$. Tím dostáváme následující soustavu diferenčních rovnic:

$$\begin{aligned} x_i - x_{iP} &= k_i(x_{iL} - x_{iP}), & i &= 0, \dots, n, \\ y_i - y_{iP} &= k_i(y_{iL} - y_{iP}), & i &= 0, \dots, n, \\ x_{i-1} - x_{iP} &= k_i(x_{iL} - x_{iP}) - l_i \cos \alpha_i, & i &= 1, \dots, n, \\ y_{i-1} - y_{iP} &= k_i(y_{iL} - y_{iP}) - l_i \sin \alpha_i, & i &= 1, \dots, n, \\ \alpha_i - \alpha_{i-1} &= \rho_i \cdot l_i, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Tuto soustavu budeme v dále v textu označovat jako řízenou soustavu. Parametry $x_{iP}, y_{iP}, x_{iL}, y_{iL}$ ($i = 0, \dots, n$) vystupující v rovnicích jsou dopředu známé. Parametry ρ_i ($i = 1, \dots, n$) jsou regulace, které je potřeba optimálně navrhnout tak, aby regulace byla „optimální“ (později, v úloze nejkratší cesty a úloze nejrychlejšího průjezdu, bude definováno, co znamená slovo optimální). Proměnné k_i, α_i, x_i, y_i ($i = 0, \dots, n$), l_i ($i = 1, \dots, n$) jsou v této soustavě neznámé.

Po zvolení regulací ρ_i pro $i = 1, \dots, n$ se na tuto soustavu můžeme dívat jako na soustavu rovnic složenou z $5n + 3$ rovnic a $5n + 4$ neznámých. V dalších podkapitolách se budeme zabývat rozbořem této soustavy, její řešitelností a využitím v aplikačních úlohách. Poznamenáváme, že zatím jsme neodvodili diferenční rovnice modelující tečné zrychlení vozidla. Tomu je věnována podkapitola 2.7.

2.5 Pojem systému a obor regulace

Systémem budeme pro účely naší práce rozumět množinu parametrů, množinu neznámých, regulaci a řízenou soustavu diferenčních rovnic spojující tyto veličiny. Systém je tedy v naší práci tvořen $4(n + 1)$ známými reálnými parametry

$$x_{iP}, y_{iP}, x_{iL}, y_{iL} \quad i = 0, \dots, n,$$

dále $5n + 4$ neznámými reálnými proměnnými

$$k_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\alpha_i \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$x_i, y_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$l_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

a regulací ρ :

$$\rho_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Všechny tyto veličiny vystupují v řízené soustavě $5n + 3$ rovnic (2.5). V systému nevolíme regulaci $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n$ zcela libovolně. V podkapitole 1.2 jsme definovali tři podmínky - viz vztahy (1.6), (1.8) a (1.9), které musela regulace ρ v úloze optimálního řízení splňovat. Tyto tři podmínky si nyní rozebereme a upravíme tak, aby korespondovaly s definicí regulace $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n$ a bylo je tak možné včlenit do úlohy nelineárního programování:

1) Absolutní omezení regulace ρ vhodně zvolenou kladnou konstantou ρ_{MAX} je v úloze optimálního řízení dáno podmínkou (1.6), která má po diskretizaci následující tvar:

$$-\rho_{MAX} \leq \rho_i \leq \rho_{MAX}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Tuto podmínku není třeba modifikovat a ponecháme ji proto pro úlohu nelineárního programování ve stejném tvaru, ale v následujícím textu ji budeme odkazovat jako vztah (2.6), aby bylo zřejmé, že se podmínka vztahuje k úloze nelineárního programování.

2) Absolutní omezení časové změny regulace $\rho(t)$ vhodně zvolenou konstantou $\rho_{\Delta MAX} > 0$ je dáno podmínkou (1.9):

$$|\dot{\rho}(t)| \leq \rho_{\Delta MAX}.$$

Tuto podmínku je ovšem třeba předefinovat tak, aby korespondovala s prostorovou diskretizací systému diferenčních rovnic. Připomínáme, že symbolem tečky značíme derivace podle času t , kdežto symbolem čárky značíme derivace podle parametru s . Nejprve pomocí úvahy, kterou jsme již použili při odvození diferenční rovnice (2.2) a (2.3), upravíme výraz $\dot{\rho}(t)$ na levé straně nerovnice následujícím způsobem:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d\rho(s)}{dt} = \frac{d\rho(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\rho(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \rho'(s)v(s),$$

kde $v(s)$ je velikost tečné rychlosti v bodě $X(s)$ trajektorie. Jelikož systém nemodeluje změnu tečné rychlosti, budeme tečnou rychlost uvažovat konstantní, tzn. $v(s) = v_{konst} > 0$.

Zvolení této konstanty $v_{konst} > 0$ není pro naši úlohu nijak omezeno. Mělo by ale fyzikálně odpovídat úloze, ve které se tato podmínka objeví – viz níže uvedená poznámka 2.4. Podmínka (1.9) omezující časovou změnu regulace tak přechází v podmínku omezující prostorovou změnu regulace:

$$|\rho'(s)| \leq \frac{\rho_{\Delta MAX}}{v_{konst}}.$$

Derivace $\rho'(s)$ podle parametru s vyjadřuje změnu regulace při změně polohy. Jestliže se vozidlo přesune z bodu X_{i-1} do bodu X_i , urazí tak vzdálenost l_i . Protože systém diferenčních rovnic popisuje pouze změny pohybu vozidla při přesunu vozidla z bodu X_{i-1} do bodu X_i , zajímají nás hodnoty změn regulací pouze v bodech $s = i = 1, \dots, n$. Výraz $\rho'(i)$ proto nahradíme pomocí zpětné difference takto:

$$\rho'(i) = \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{l_i},$$

čímž dostáváme následující soustavu nerovnic omezujících regulace ρ_i :

$$\left| \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{l_i} \right| \leq \frac{\rho_{\Delta MAX}}{v_{konst}}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

3) Kombinace podélného a odstředivého zrychlení v zatáčce nesmí přesáhnout přilnavost pneumatik. Tuto podmínku modelujeme v úloze optimálního řízení nerovnicí (1.8):

$$v^4 \rho^2 + a^2 \leq g^2.$$

Jelikož v našem systému neuvažujeme změnu rychlosti, pak podélné zrychlení a je nulové. Konstanta g je gravitační konstanta a velikost tečné rychlosti v_{konst} je také konstantní. Uvedená nerovnice omezující regulaci ρ musí být splněna ve všech bodech X_i . Nerovnice (1.8) tak přejde v soustavu nerovnic:

$$v_{konst}^4 \rho_i^2 \leq g^2, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Poznámka 2.4. Volbou konstantní rychlosti v_{konst} díky třetí podmínce (2.8) omezujeme maximální křivost trajektorie. Lze si snadno všimnout, že pokud v systému uvažujeme, že se vozidlo pohybuje velice malou konstantní rychlostí v_{konst} , pak podmínky (2.7) a (2.8) omezující regulace ρ_i přestávají být aktivní a jediná aktivní podmínka je tak podmínka první (2.6). Podmínky (2.6) - (2.8) představují v našem systému podmínky oboru regulace a obor regulace tímto definují. V následující podkapitole již přikročíme k formulaci úlohy nejkratší cesty mezi body A a B .

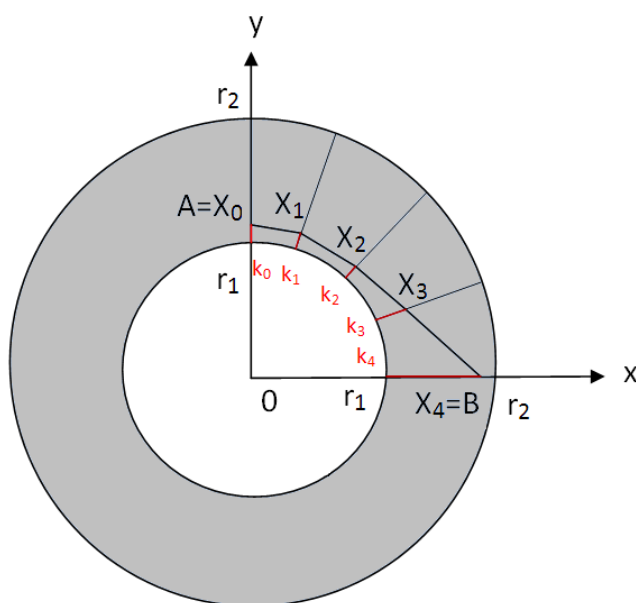
2.6 Úloha nejkratší cesty

Mnoha aplikačních úloh řeší otázku, jak se z bodu A do bodu B dostat po co nejkratší cestě. Úloze nejkratší cesty se věnuje např. teorie grafu [12]. Poznamenejme, že mezi přístupem této práce a přístupem teorie grafu k úloze nejkratší cesty lze najít souvislosti. V naší práci se úlohou nejkratší cesty míní úloha, kterou v této podkapitole zformulujeme.

Jestliže jsme pomocí bodů X_0, X_1, \dots, X_n definovali trajektorii jako lomenou čáru, pak v úloze nejkratší cesty (viz obrázek 2.4) požadujeme, aby platilo:

$$A = X_0,$$

$$B = X_n.$$



Obr. 2.4. Úloha nejkratší cesty.

Tento požadavek lze realizovat formou dvou rovnic

$$\begin{aligned} k_0 &= k_A, \\ k_n &= k_B, \end{aligned} \tag{2.9}$$

které připojíme k řízené soustavě rovnic (2.5) systému. V rovnicích (2.9) jsou $k_A, k_B \in \langle 0,1 \rangle$ vhodně zvolené konstanty.

Analogicky k definici 1.5 budeme pod pojmem regulace $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n$ převádějící bod A do bodu B rozumět takovou regulaci, pro niž řízená soustava (2.5) má řešení a současně platí obě rovnice (2.9). Definujme ještě účelovou funkci L popisující délku trajektorie (z bodu A do bodu B) takto:

$$L = \sum_{i=1}^n l_i.$$

V dalším odstavci formulujeme úlohu nejkratší cesty pomocí odvozeného systému a účelové funkce. Tato úloha je jakýmsi předstupněm k úloze nejrychlejšího průjezdu, která je jedním z hlavních cílů této práce.

Formulace úlohy nejkratší cesty. Mezi všemi regulacemi $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n$ z oboru regulace daným podmínkami (2.6) – (2.8):

$$-\rho_{MAX} \leq \rho_i \leq \rho_{MAX}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\left| \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{l_i} \right| \leq \frac{\rho_{\Delta MAX}}{v_{konst}}, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$v_{konst}^4 \rho_i^2 \leq g^2, \quad i = 1, \dots, n$$

převádějícími bod A do bodu B , tj. musí platit (2.9):

$$k_0 = k_A,$$

$$k_n = k_B,$$

najdi takovou regulaci ρ , aby řízená soustava rovnic systému (2.5)

$$x_i - x_{iP} = k_i(x_{iL} - x_{iP}), \quad i = 0, \dots, n,$$

$$y_i - y_{iP} = k_i(y_{iL} - y_{iP}), \quad i = 0, \dots, n,$$

$$x_{i-1} - x_{iP} = k_i(x_{iL} - x_{iP}) - l_i \cos \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_{i-1} - y_{iP} = k_i(y_{iL} - y_{iP}) - l_i \sin \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = \rho_i \cdot l_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde

$$x_{iP}, y_{iP}, x_{iL}, y_{iL} \in R, \quad i = 0, \dots, n$$

jsou dané parametry a

$$k_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\alpha_i \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$x_i, y_i \in R, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$l_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

jsou neznámé proměnné, měla řešení a zároveň účelová funkce

$$L = \sum_{i=1}^n l_i$$

nabývala svého minima.

Poznamenejme, že přípustné i optimální hodnoty parametru polohy k_1, \dots, k_{n-1} , obsažené v soustavě rovnic (2.5) jako neznámé, pak jednoznačně spolu s parametry $k_0 = k_A, k_n = k_B$ danými (2.9) určují trajektorii z bodu A do bodu B (viz obrázek 2.4).

2.7 Rozšíření úlohy nejkratší cesty

V této podkapitole se budeme zabývat rozšířením systému diferenčních rovnic popisujících pohyb vozidla, jak jsme jej odvodili v předcházejících podkapitolách, abychom do úlohy zapojili jako regulaci i tečné zrychlení a , a mohli tak ovlivňovat i velikost rychlosti vozidla.

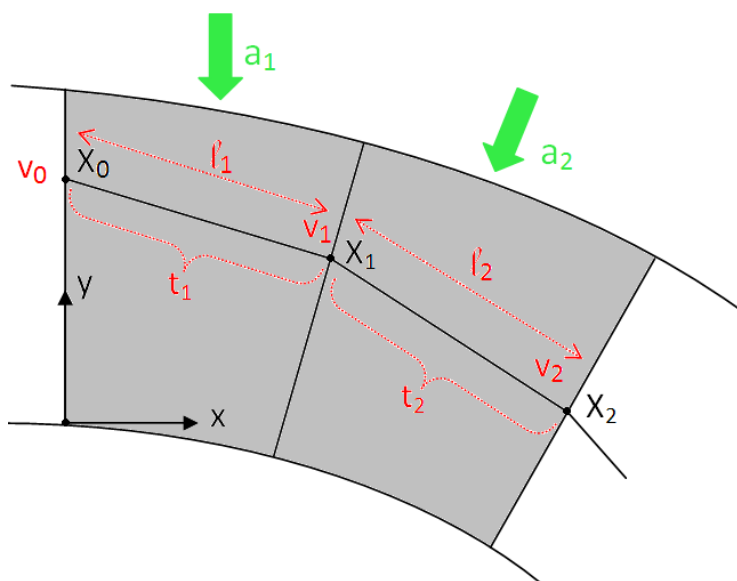
Nejprve k řízené soustavě rovnic (2.5) připojíme rovnice popisující průběh rychlosti v ovlivněný regulací - tečným zrychlením a . Na základě tohoto rozšíření budeme moci formulovat úlohu nejrychlejšího průjezdu, což je hlavní cíl této práce.

Připomeňme si nejprve, co myslíme pojmem regulace a (viz podkapitola 2.1). Regulaci a uvažujeme jako funkci parametru s (píšeme $a(s)$), která je po částech konstantní. Regulace se může podél trajektorie skokově měnit pouze v bodech X_0, X_1, \dots, X_n a mezi těmito body nemění svou hodnotu. Hodnotu regulace $a(s)$ definujeme následovně:

$$a(s) = a_{s^{max}}, \quad s \in \langle 0, n \rangle,$$

kde s^{max} je nejmenší přirozené číslo, pro které platí $s \leq s^{max}$. Protože regulace je po částech konstantní funkce a nabývá pouze konečně mnoha hodnot, můžeme ji reprezentovat posloupností čísel a_1, \dots, a_n .

Definujme nyní čas t_i jako čas, během kterého urazí vozidlo vzdálenost l_i , tj. vzdálenost mezi bodem X_{i-1} a bodem X_i . Čas t_i je definován je pro $i = 1, \dots, n$, viz obrázek 2.5.



Obr. 2.5. Průběh rychlosti.

Odvoďme dvě rovnice pro průběh rychlosti mezi body X_{i-1}, X_i . Při odvozování bychom mohli vyjít z rovnice (2.2), ale pro účely této práce můžeme využít i názornější postup. Rychlost v byla v podkapitole 1.2 definována jako funkce času $v(t)$ a její průběh popisuje odvozená diferenciální rovnice

$$\dot{v}(t) = a(t),$$

která je první rovnicí soustavy (1.5). Pro odvození diferenčních rovnic stačí odvodit pouze diferenční vztah mezi rychlostí v_{i-1} v bodě X_{i-1} a rychlostí v_i v bodě X_i . Pro názornost si obě diferenční rovnice odvodíme nejprve pro rychlosti v_0 a v_1 (dle obrázku 2.5).

Odvození první diferenční rovnice. Vozidlo má v bodě X_0 rychlost v_0 . Mezi bodem X_0 a bodem X_1 na něj na vzdálenosti l_1 působí tečné zrychlení a_1 . Pro čas t_1 (doba pohybu mezi body) platí následující vztah, který uvádíme bez odvození, neboť jej lze najít v mnoha učebnicích středoškolské fyziky nebo např. v [8]:

$$l_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \quad (2.10)$$

což je kvadratická rovnice pro t_1 , která má obecně dvě řešení. Podmínka na diskriminant

$$v_0^2 + 2a_1 l_1 \geq 0$$

zaručující reálnost obou (v případě ostré nerovnosti navzájem různých) kořenů je splněna, neboť její nesplnění by fyzikálně odpovídalo situaci, že zrychlení a_1 je natolik malé (resp. brzdění je tak intenzivní), že na dráze l_1 by se rychlost v_0 , kterou vozidlo vyjíždí z bodu X_0 snížila natolik, že by byla v bodě X_1 záporná, tedy v bodě X_1 by pro rychlost v_1 platilo:

$$v_1 < 0,$$

což je ve sporu s fyzikálním předpokladem úlohy, že pro všechny rychlosti v_i platí:

$$v_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Předpokladem nezáporných rychlostí v_i je tedy zaručeno, že rovnice (2.10) má oba kořeny z oboru reálných čísel. Z předpokladu kladných vzdáleností l_i a rozboru rovnice

$$t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2a_1 l_1}}{a_1}$$

vyplývá, že pro $a_1 > 0$ je jeden kořen kladný a druhý záporný. Předpokladem úlohy

$$t_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(speciálně $t_1 > 0$) zaručíme výběr správného (kladného) kořene rovnice. V případě $a_1 < 0$ má rovnice oba kořeny kladné. Z nich uvažujeme kořen menší, neboť větší kořen by znamenal, že brzdící vozidlo projede bod X_1 a v jízdě pokračuje, dokud nezastaví. Poté se do bodu X_1 začne vracet z opačného směru, což by znamenalo $v_1 < 0$.

Poznámka 2.5. Pomocí uvedené úvahy by sice šlo explicitně vyjádřit kořen kvadratické rovnice

$$t_i = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a_1 l_1}}{a_1}$$

a toto vyjádření považovat za ekvivalentní rovnici k rovnici kvadratické (2.10), ale to bychom museli předpokládat $a_1 \neq 0$ (jinak by se totiž kvadratická rovnice zredukovala na rovnici lineární). Protože však předpoklad

$$a_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

nelze zaručit (a ani není žádoucí), diferenční rovnici uvádíme ve tvaru (2.10).

Odvození druhé diferenční rovnice. Nyní odvodíme druhou diferenční rovnici, která dává do vztahu rychlosti v_0 a v_1 . Integrací první rovnice soustavy (1.5)

$$\dot{v}(t) = a(t)$$

z bodu X_0 do bodu X_1 :

$$\int_{t(X_0)}^{t(X_1)} \dot{v}(t) dt = \int_{t(X_0)}^{t(X_1)} a(t) dt,$$

dostáváme díky konstantnímu zrychlení $a = a_1$ mezi body X_0 a X_1 vztah

$$v(X_1) - v(X_0) = a_1[t(X_1) - t(X_0)],$$

který přeznačíme tak, aby odpovídal značení této práce. Tím dostáváme diferenční rovnici pro rychlosti v_1 a v_0 :

$$v_1 - v_0 = a_1 t_1. \quad (2.11)$$

Nyní obě odvozené diferenční rovnice (2.10) a (2.11) zobecníme pro $i = 1, \dots, n$ na tvar:

$$l_i = v_{i-1} t_i + \frac{1}{2} a_i t_i^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$v_i - v_{i-1} = a_i t_i, \quad i = 1, \dots, n$$

a připojíme je k systému zavedenému v podkapitole 2.5, čímž systém rozšíříme o n regulací a_i ($i = 1, \dots, n$), $2n + 1$ neznámých t_i ($i = 1, \dots, n$), v_i ($i = 0, \dots, n$) a řízená soustava rovnic (2.5) má nyní tvar:

$$\begin{aligned} x_i - x_{iP} &= k_i(x_{iL} - x_{iP}), & i &= 0, \dots, n, \\ y_i - y_{iP} &= k_i(y_{iL} - y_{iP}), & i &= 0, \dots, n, \\ x_{i-1} - x_{iP} &= k_i(x_{iL} - x_{iP}) - l_i \cos \alpha_i, & i &= 1, \dots, n, \\ y_{i-1} - y_{iP} &= k_i(y_{iL} - y_{iP}) - l_i \sin \alpha_i, & i &= 1, \dots, n, \\ \alpha_i - \alpha_{i-1} &= \rho_i l_i, & i &= 1, \dots, n, \\ v_i - v_{i-1} &= a_i t_i, & i &= 1, \dots, n, \\ l_i &= v_{i-1} t_i + 1/2 a_i t_i^2, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Než přikročíme k formulaci úlohy nejrychlejšího průjezdu, je potřeba pro tuto úlohu rozšířit pojem oboru regulace. Tomu se budeme věnovat v následující podkapitole.

2.8 Rozšíření oboru regulace

Dvojici regulací $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n$ a $a = a_1, \dots, a_n$ při řešení úlohy volíme z oboru regulace. To znamená, že obě regulace musí vyhovovat podmínkám oboru regulace. Odvození podmínek oboru regulace pro úlohu nejrychlejšího průjezdu vyplývá z podmínek (1.6) - (1.10) a je rozšířením podmínek oboru regulace (2.6) – (2.8) v úloze nejkratší cesty, kde jsme podmínky odvodili podrobně. V následujícím textu proto odvození podmínek oboru regulace uvedeme již stručněji.

1) Absolutní omezení regulací vhodně zvolenými konstantami g a ρ_{MAX} :

$$\begin{aligned} -\rho_{MAX} &\leq \rho_i \leq \rho_{MAX}, & i &= 1, \dots, n, \\ -g &\leq a_i \leq g, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2) Absolutní omezení časové změny regulací vhodně zvolenými konstantami $\rho_{\Delta MAX}$, $a_{\Delta MAX}$:

V bodě X_{i-1} se hodnota regulace skokově mění z ρ_{i-1} na ρ_i . Regulace ρ_i působí na vozidlo po dobu t_i . Tento skok v úloze nejkratší cesty omezuje podmínka (2.7), ale nyní skok omezíme zobecněnou podmínkou

$$\left| \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{t_i} \right| \leq \rho_{\Delta MAX}, \quad i = 2, \dots, n,$$

která koresponduje s podmínkou (1.9) úlohy optimálního řízení zavedené v podkapitole 1.2.

Obdobně definujeme podmínku pro časovou (skokovou) změnu regulace a_i . Celkově jsou obě podmínky tvaru:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{t_i} \right| &\leq \rho_{\Delta MAX}, & i = 2, \dots, n, \\ \left| \frac{a_i - a_{i-1}}{t_i} \right| &\leq a_{\Delta MAX}, & i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

3) Podmínka celkového zrychlení vozidla:

Mezi bodem X_{i-1} a bodem X_i na vozidlo působí regulace ρ_i, a_i . Průběh rychlosti v je mezi těmito body monotónní, což plyne z první diferenciální rovnice řízené soustavy (1.5), kde hodnota regulace a_i je konstantní mezi body X_{i-1} a X_i . Pro rychlost v tak platí v případě $a_i \geq 0$ nerovnice:

$$v_{i-1} \leq v \leq v_i.$$

V případě $a_i \leq 0$ pak platí nerovnice:

$$v_{i-1} \geq v \geq v_i.$$

Oba tyto případy lze shrnout jedinou podmínkou:

$$v \leq \max\{|v_{i-1}|, |v_i|\}. \quad (2.15)$$

Podmínka celkového zrychlení vozidla říká, že kombinace podélného a odstředivého zrychlení v zatáčce nesmí přesáhnout přilnavost pneumatik. Tuto podmínku zachycuje nerovnice (1.8) kterou uvádíme v již diskretizovaném tvaru:

$$v^4 \rho_i^2 + a_i^2 \leq g^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

kde za v dosadíme z (2.15) čímž dostáváme 2 nerovnice, které musí platit současně:

$$\begin{aligned} v_{i-1}^4 \rho_i^2 + a_i^2 &\leq g^2, & i = 1, \dots, n, \\ v_i^4 \rho_i^2 + a_i^2 &\leq g^2, & i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Poznámka 2.7. V situaci, kdy $a_i \neq 0$ (tedy platí buď $v_{i-1} > v_i$ nebo $v_{i-1} < v_i$), je aktivní pouze jedna ze dvou nerovnic.

2.9 Formulace úlohy nejrychlejšího průjezdu

V této podkapitole se budeme zabývat úlohou nejrychlejšího průjezdu, což je úloha podobná úloze nejkratší cesty. V této úloze požadujeme, aby se vozidlo z bodu A do bodu B dostalo nikoli po co nejkratší dráze, ale za co nejmenší čas. Úloha nejrychlejšího průjezdu je rozšířením úlohy nejkratší cesty a její formulace a řešení je jedním z hlavních cílů této práce.

Definujme účelovou funkci T popisující celkový čas, během kterého se vozidlo přesouvá z bodu A do bodu B následujícím způsobem:

$$T = \sum_{i=1}^n t_i.$$

V dalším odstavci můžeme přikročit k formulaci úlohy nejrychlejšího průjezdu. Úlohu budeme formulovat obdobně jako úlohu nejkratší cesty v podkapitole 2.6. Ve formulaci úlohy se budeme jednak odkazovat, aby bylo zřejmé, kde a jak byly vztahy definovány či odvozeny a jednak vztahy pod sebe podrobně a přehledně vypíšeme, protože v poslední kapitole práce se budeme na tuto formulaci (v rámci její modifikace a implementace v programu GAMS) často odkazovat.

Formulace úlohy nejrychlejšího průjezdu. Mezi všemi regulacemi ρ a a z oboru regulace daným podmínkami (2.13), (2.14) a (2.16):

$$\begin{aligned} -\rho_{MAX} &\leq \rho_i \leq \rho_{MAX}, & i = 1, \dots, n, \\ -g &\leq a_i \leq g, & i = 1, \dots, n, \\ \left| \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{t_i} \right| &\leq \rho_{\Delta MAX}, & i = 2, \dots, n, \\ \left| \frac{a_i - a_{i-1}}{t_i} \right| &\leq a_{\Delta MAX}, & i = 2, \dots, n, \\ v_{i-1}^4 \rho_i^2 + a_i^2 &\leq g^2, & i = 1, \dots, n, \\ v_i^4 \rho_i^2 + a_i^2 &\leq g^2, & i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

převádějícími bod A do bodu B , tj. musí platit (2.9):

$$k_0 = k_A,$$

$$k_n = k_B,$$

najdi takovou dvojici regulací $\rho = \rho_1, \dots, \rho_n, a = a_1, \dots, a_n$, aby řízená soustava rovnic (2.12)

$$x_i - x_{iP} = k_i(x_{iL} - x_{iP}), \quad i = 0, \dots, n,$$

$$y_i - y_{iP} = k_i(y_{iL} - y_{iP}), \quad i = 0, \dots, n,$$

$$x_{i-1} - x_{iP} = k_i(x_{iL} - x_{iP}) - l_i \cos \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_{i-1} - y_{iP} = k_i(y_{iL} - y_{iP}) - l_i \sin \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\alpha_i - \alpha_{i-1} = \rho_i \cdot l_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$v_i - v_{i-1} = a_i t_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$l_i = v_{i-1} t_i + 1/2 a_i t_i^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

v níž

$$x_{iP}, y_{iP}, x_{iL}, y_{iL} \in R, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.17)$$

jsou dané parametry a

$$k_i \in \langle 0, 1 \rangle, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\alpha_i \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$x_i, y_i \in R, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$v_i > 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$l_i, t_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

jsou neznámé proměnné, měla řešení a zároveň účelová funkce

$$T = \sum_{i=1}^n t_i$$

nabývala svého minima.

3. Implementace v prostředí GAMS a MATLAB

V této poslední kapitole navážeme na podkapitolu 1.2, kde jsme formulovali motivační úlohu jako úlohu optimálního řízení. Vozidlo se má dostat z bodu A do bodu B (viz obrázek 1.1) za co nejkratší čas. Pohyb vozidla je dán řízenou soustavou (1.5), hledané regulace převádějící vozidlo z bodu A do bodu B jsou definovány oborem regulace vymezeným podmínkami (1.6) - (1.10). Tuto úlohu jsme v druhé kapitole práce diskretizací převedli na úlohu nelineárního programování, kterou jsme precizně zformulovali v podkapitole 2.9. Řízenou soustavu (1.5) jsme v ní nahradili řízenou soustavou (2.12) a podmínky vymezující obor regulace jsme vymezily podmínkami (2.13), (2.14) a (2.16).

V této kapitole nasimulujeme v prostředí MATLAB data úlohy (parametry vymezující trať) a takto formulovanou úlohu nejrychlejšího průjezdu pak v programu GAMS naprogramujeme, vyřešíme a dosažené výsledky nakonec interpretujeme. (Optimalizační úlohy lze řešit i v MATLABU, viz [10], v této práci ale využijeme program GAMS). Úlohu uvedeme v různých modifikacích (jiná trať, jiné počáteční a koncové podmínky) a výsledky opět interpretujeme a porovnáme. V závěru kapitoly se zmíníme o případném vylepšení modelu vozidla a trati a také o možném rozšíření úlohy.

3.1 Motivační příklad

Abychom úlohu nejrychlejšího průjezdu mohli řešit, je potřeba k této úloze nejprve zajistit vhodná data popisující závodní trať. Ta v našem případě odpovídá obrázku 1.1 - jedná se o průnik mezikruží (s poloměry r_1 a r_2) s prvním kvadrantem. Trať je definována pomocí $n + 1$ bodů $X_{0P}, X_{1P}, \dots, X_{nP}$ ležících na jejím pravém (z pohledu řidiče) okraji a $n + 1$ bodů $X_{0L}, X_{1L}, \dots, X_{nL}$ ležících na jejím levém okraji. Dráhu uvažujeme pouze v rovině (nikoli v prostoru) a body pomocí souřadnic vyjádříme po složkách takto:

$$X_{0P} = \begin{bmatrix} x_{0P} \\ y_{0P} \end{bmatrix}, X_{1P} = \begin{bmatrix} x_{1P} \\ y_{1P} \end{bmatrix}, \dots, X_{nP} = \begin{bmatrix} x_{nP} \\ y_{nP} \end{bmatrix}, X_{0L} = \begin{bmatrix} x_{0L} \\ y_{0L} \end{bmatrix}, X_{1L} = \begin{bmatrix} x_{1L} \\ y_{1L} \end{bmatrix}, \dots, X_{nL} = \begin{bmatrix} x_{nL} \\ y_{nL} \end{bmatrix}.$$

V naší úloze zvolíme poloměry mezikruží $r_1 = 30\text{m}$, $r_2 = 40\text{m}$. Dráhu diskretizujeme volbou $n = 10$. Body $X_{0P}, X_{1P}, \dots, X_{10P}$ a $X_{0L}, X_{1L}, \dots, X_{10L}$, které tvoří parametry úlohy - viz (2.17), pak vygenerujeme v MATLABU následujícím způsobem:

$$\beta_i = \left(1 - \frac{i}{n}\right) \frac{\pi}{2}, \quad i = 0, \dots, 10,$$

$$X_{iP} = \begin{bmatrix} x_{iP} \\ y_{iP} \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}, \quad i = 0, \dots, 10,$$

$$X_{iL} = \begin{bmatrix} x_{iL} \\ y_{iL} \end{bmatrix} = r_2 \begin{bmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \end{bmatrix}, \quad i = 0, \dots, 10.$$

Úlohu nejrychlejšího průjezdu formulovanou v podkapitole 2.9 naprogramujeme v modelovacím jazyku GAMS [4], určeném pro řešení úloh matematického programování.

V podmínice (2.13) uvažujeme $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ a volíme konstantu $\rho_{MAX} = 0,1 \text{ m}^{-1}$. To odpovídá vozidlu, jehož minimální poloměr otáčení je $R = 10 \text{ m}$. V podmínice (2.14) volíme konstanty $\rho_{\Delta MAX} = 0,1 \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ a $a_{\Delta MAX} = 10 \text{ ms}^{-3}$. To znamená, že vozidlo je schopno změnit směr jízdy z „maximálního zatáčení doprava“ na „maximální zatáčení doleva“ nebo zpět nejdříve za čas 1 s. Obdobně je vozidlo schopno ze stavu maximálního brzdění začít maximálně zrychlovat nebo naopak ze stavu maximálního zrychlování začít maximálně brzdit za čas alespoň 1 s. Pokud na počáteční bod A a koncový bod B neklademe omezení, pak ve formulaci úlohy nemusíme požadovat splnění rovnic (2.9). To odpovídá situaci, kdy bod A leží kdekoli na startovací čáře (čára spojující bod X_{0P} s bodem X_{0L}). Podobně i bod B leží kdekoli na cílové čáře.

Takto formulovanou úlohu jsme řešili bez zadaných počátečních i koncových podmínek. GAMS pro tuto úlohu spočítal optimální regulaci $\rho = \rho_1, \dots, \rho_{10}$ a $a = a_1, \dots, a_{10}$ převádějící bod A na bod B v co nejkratším čase T . K této regulaci dopočítal i odpovídající řešení řízené soustavy $(k_i, x_i, y_i, l_i, t_i, \alpha_i, v_i)$. V rámci optimalizace účelové funkce T navrhl i optimální počáteční a koncové podmínky (2.9). Výsledek optimalizace této motivační úlohy v práci uvádíme jednak formou obrázku 3.1, kde jsou křížky vyznačeny body pravého i levého okraje trati a mezi nimi je vykreslena optimální trajektorie, a jednak formou tabulky 3.1. Jednotlivé řádky tabulky odpovídají bodům X_0, X_1, \dots, X_{10} vypočítané optimální trajektorie. V každém řádku je zaznamenána poloha vozidla v tomto bodě pomocí parametru polohy k , čemuž odpovídají souřadnice (x, y) . Dále je v řádku zaznamenána regulace ρ a a , která na vozidlo působila od předchozího bodu. Veličina l je dráha, kterou vozidlo urazilo od předchozího bodu a stejně tak i čas t je čas jízdy od minulého bodu. Konečně α a v představují směr a velikost rychlosti, kterou vozidlo vjelo do daného bodu.

i	k [-]	ρ [1/m]	a [m/s ²]	x [m]	y [m]	l [m]	t [s]	α [rad]	v [m/s]
1	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	40.0000	0.0000	0.0000	-0.6585	49.1236
2	0.5873	-0.0034	-3.0871	5.6117	35.4309	7.2366	0.1480	-0.6833	48.6667
3	0.3095	-0.0042	-1.8351	10.2270	31.4753	6.0784	0.1252	-0.7086	48.4370
4	0.1310	-0.0043	-0.7281	14.2143	27.8973	5.3574	0.1107	-0.7314	48.3564
5	0.0313	-0.0043	-0.4163	17.8177	24.5239	4.9360	0.1021	-0.7524	48.3139
6	0.0000	-0.0043	-0.1719	21.2132	21.2132	4.7424	0.0982	-0.7728	48.2970
7	0.0337	-0.0043	0.0000	24.5431	17.8316	4.7458	0.0983	-0.7931	48.2970
8	0.1355	-0.0043	0.0000	27.9376	14.2349	4.9457	0.1024	-0.8143	48.2970
9	0.3155	-0.0043	0.0000	31.5328	10.2456	5.3702	0.1112	-0.8373	48.2970
10	0.5930	-0.0043	0.0861	35.4872	5.6206	6.0851	0.1260	-0.8634	48.3078
11	1.0000	-0.0043	0.0000	40.0000	0.0000	7.2081	0.1492	-0.8943	48.3078

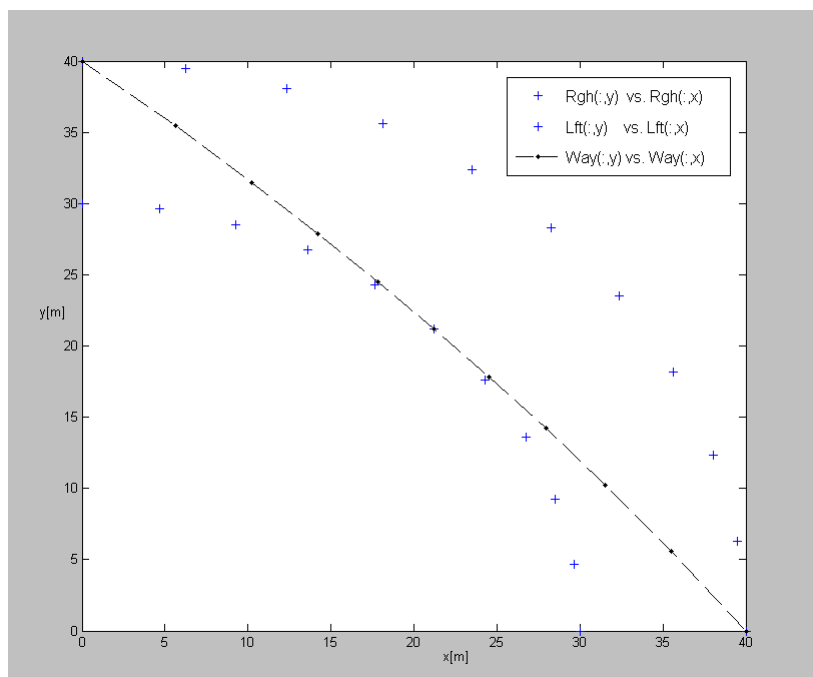
Tab. 3.1

Hodnota účelové funkce

$$T = \sum_{i=1}^n t_i$$

byla pro tuto úlohu vypočtena na:

$$T = 1.1713 \text{ s.}$$



Obr. 3.1. Nejrychlejší průjezd v GAMS, $T = 1.1713$ s.

Na obrázku 3.1 si můžeme všimnout, že bod $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \end{bmatrix}$ i bod $B = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}$ sice leží na trati a řešení úlohy tak plně vyhovují. Pokud by ale trať dle obrázku navazovala či pokračovala jako výše zmíněné mezikružší, vozidlo by v bodě následujícím po bodu B opustilo trať. Podobně do bodu A by muselo vjet z bodu ležícího mimo dráhu. Úloha by tak nedávala smysl. Toto lze ošetřit vhodně definovanou počáteční a koncovou podmínkou. Těmito a jinými podmínkami se budeme zabývat v následující podkapitole práce.

3.2 Modifikace motivačního příkladu

Úkolem této podkapitoly není vytvořit precizní model konkrétní závodní trati a na něm optimalizovat jízdu konkrétního vozidla. Hlavním cílem této podkapitoly je poukázat na to, jak lze modelovat různé situace a jak v případě vhodného postupu (zde nelineárního programování) lze poměrně snadno podmínky omezující pohyb vozidla po trati modifikovat. Tato výhoda je dána především počátečním návrhem a vhodným způsobem formulace úlohy, kterou jsme se zabývali v celé druhé kapitole této práce.

V minulé podkapitole jsme optimalizovali ukázkové číselné zadání pro motivační úlohu a naznačili jsme problematiku koncových podmínek. V této podkapitole problematiku zadávání podmínek (nejen počátečních a koncových) rozebereme na jednotlivých příkladech více. V počátečních (koncových) podmínkách klademe nejčastěji požadavek na rychlost. Její velikost v a směr α můžeme předepsat podmínkami

$$v_0 = v_A, \quad \alpha_0 = \alpha_A,$$

$$(v_n = v_B, \quad \alpha_n = \alpha_B,)$$

kde v_A a α_A (v_B a α_B) jsou vhodně zvolené konstanty. Počáteční, resp. koncovou polohu (jestli se má vozidlo na startovní, resp. cílové čáře nacházet spíše u levého či pravého okraje trati), lze zajistit podmínkami

$$k_0 = k_A, \quad k_n = k_B.$$

Podmínky, které klademe na úlohu, nemohou být zcela libovolné. Např. kdybychom v motivační úloze položili $v_B = 60 \text{ m/s}$ a $v_A = 0 \text{ m/s}$, úloha by zcela jistě neměla řešení. Jednak proto, že na tak krátké dráze, kterou zmíněné mezikruží je, by se vozidlo nezvládlo z počáteční rychlosti rozjet na koncovou rychlost, a také proto, že na trati by muselo zatáčet v rychlosti až $v_B = 60 \text{ m/s}$, což by jistě vedlo k nesplnění podmínky modelující přilnavost vozidla k trati (2.16). Dále při zadávání podmínek omezující řešení úlohy si musíme uvědomit, že přidáním další podmínky se hodnota účelová T funkce logicky nemůže zlepšit. Podmínky, které na řešení klademe, nemusí být nutně jen počáteční nebo koncové. Může se jednat i o podmínku omezující rychlost vozidla nebo jeho polohu třeba i uprostřed trati, čímž simulujeme např. úhybný manévr vozidla před překážkou. Dále můžeme klást omezení i na samotné regulace (můžeme tak simulovat např. změnu povrchu vozovky – vozidlo např. projíždí hlubokou kaluží, ve které nemůže ani brzdit ani zatáčet).

Na následujícím příkladu ukážeme 3 různé kombinace podmínek omezující jízdu vozidla

1. jízda – pevný počátek:

Jízda je omezena pouze počátečními podmínkami, které mohou být zadány formou rovnice i nerovnice. Pro naši úlohu volíme následující počáteční podmínky:

$$v_A = 20 \text{ ms}^{-1}, \alpha_A = 0 \text{ rad}, k_A < 0,5.$$

2. jízda – pevný počátek i konec

K počátečním podmínkám z 1. jízdy

$$v_A = 20 \text{ ms}^{-1}, \alpha_A = 0 \text{ rad}, k_A < 0,5$$

nyní připojíme i následující koncové podmínky

$$\alpha_A = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}, k_B < 0,8.$$

3. jízda - pevný počátek i konec a překážka na trati

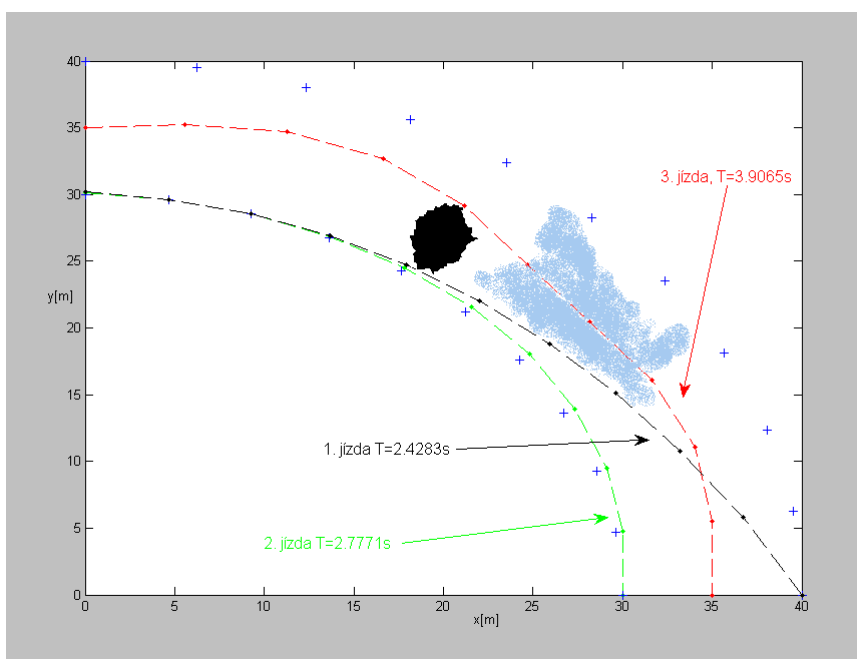
Tuto jízdu omezíme stejnými počátečními i koncovými podmínkami jako druhou jízdu, navíc ale předpokládáme, že v polovině trati je překážka při vnitřní straně zatáčky, kterou je třeba objet. To simulujeme podmínkou

$$k_4 > 0,6.$$

Dále předpokládáme, že mezi překážkou a cílem je ještě navíc hluboká kaluž, ve které auto nemůže zatáčet a ani zrychlovat. Kaluž vozidlo pouze zbrzdí. To simulujeme podmínkou

$$\rho_7 = 0 \text{ m}^{-1}, a_7 = -2 \text{ ms}^{-2}.$$

Na obrázku 3.2 jsou graficky znázorněny všechny tři optimalizované jízdy. Na obrázku lze snadno porovnat trajektorie vozidla pro jednotlivé jízdy a u každé z trajektorií je zaznamenána hodnota účelové funkce.



Obr. 3.2. Tři typy jízdy.

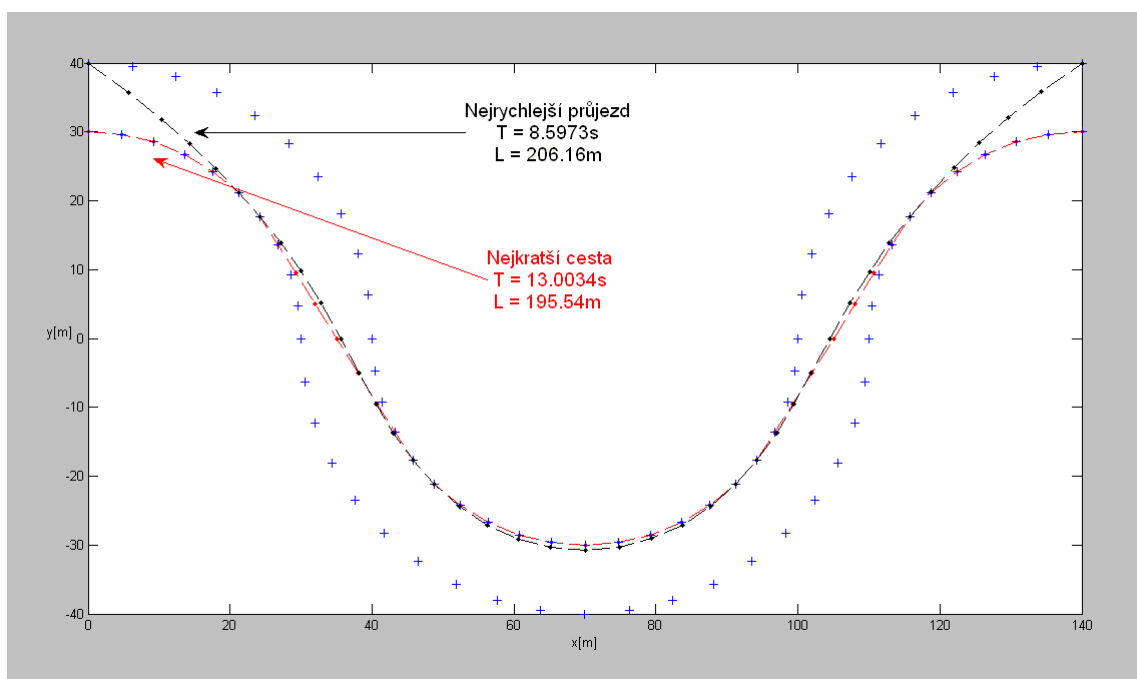
3.3 Rozšíření úlohy

V předchozích dvou podkapitolách jsme se zabývali optimalizací motivační úlohy a její modifikací. V této podkapitole ukážeme, jak úlohu rozšířit i pro jinou trať. Toto rozšíření je velice důležité, neboť díky němu lze vytvořit model konkrétního závodního okruhu a simulovat (a optimalizovat) na něm závodní jízdu konkrétního vozidla.

Rozšíření úlohy si ukážeme na příkladu znázorněném na obrázku 3.3. Motivační úlohu jsme rozšířili pro čtyři navazující čtvrtkružnice generované obdobným způsobem jako v podkapitole 3.1. Na úlohu nejrychlejší průjezdu neklademe žádné počáteční, koncové, ani jiné podmínky (obdobně jako v motivační úloze). K úloze nejrychlejší průjezdu jsme pro srovnání optimalizovali stejným programem i úlohu nejkratší cesty (na kterou také neklademe žádné podmínky). Obě úlohy se tak navzájem liší pouze účelovou funkcí, která má v případě úlohy nejkratší cesty tvar:

$$L = \sum_{i=1}^n l_i.$$

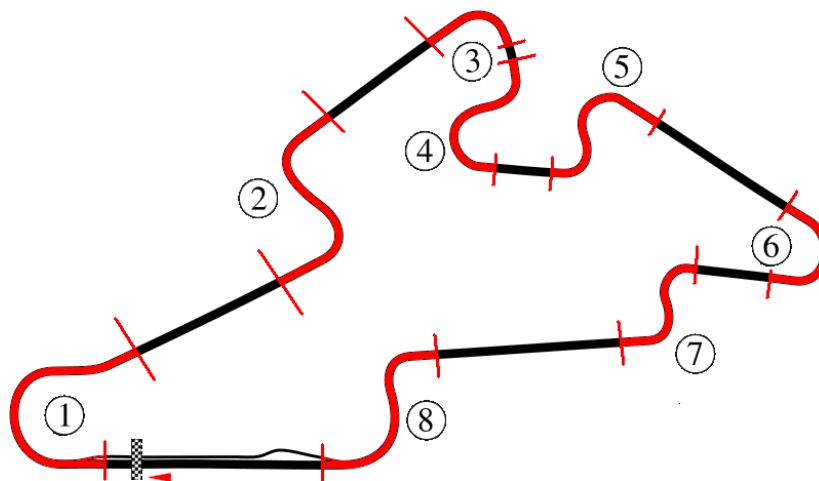
Výsledek obou úloh je pro srovnání znázorněn na obrázku 3.3.



Obr. 3.3. Nejrychlejší průjezd vs. nejkratší cesta.

Rozšířenou úlohu uvádíme ze dvou důvodů. Prvním je snaha poukázat na vhodnou formulaci úlohy (podkapitola 2.9) umožňující velice snadnou a efektivní implementaci do prostředí GAMS, i s vědomím rizika nekonvexnosti řešené úlohy (možnost existence lokálních extrémů, které lokálně prohledávací algoritmy implementované v GAMSu mohou nalézat místo žádaného řešení globálního, si např. žádá využít fyzikálního vhledu při zadání počáteční dráhy pro numerické iterace). Formulace dále umožňuje jednoduchým a elegantním způsobem zadávat různé podmínky a omezení nebo dokonce i měnit celý charakter úlohy (např. změnou účelové funkce). Druhým důvodem je poukázání na skutečnost, že úlohu lze velice snadno rozšířit pouhým přidáním dat. Tímto způsobem bychom mohli snadno optimalizovat delší úseky trati než jen jednu zatáčku. Na uvedeném příkladu optimalizujeme hned čtyři zatáčky, které na sebe navíc těsně navazují. Úlohu jsme řešili na běžném počítači, a i přesto byla úloha vyřešena do tří vteřin.

V následující části této podkapitoly nastíníme, jak úlohu nejrychlejšího průjezdu rozšířit na podstatně delší úseky tratě (např. na celý závodní okruh). Čas výpočtu úlohy není přímo úměrný počtu dat úlohy (počtu bodů trajektorie). Trať je proto dobré rozdělit na několik úseků a ty pak vhodným způsobem napojit. Toto rozložení a následné spojení trati tak zrychlí optimalizaci celé úlohy. Ovšem je potřeba zajistit dvě věci – jednak aby úseky byly vhodným způsobem správně napojeny, což lze realizovat pomocí počátečních a koncových podmínek, které jsme podrobněji ukázali v předchozí podkapitole 3.2 a jednak aby byla trať nejprve vhodně rozdělena na úseky. Při rozdělení trati, které si ukážeme na Masarykově okruhu (viz obrázek 3.4), postupujeme následovně.



Obr. 3.4. Masarykův okruh.

V trati (jejích datech) nejdříve vymežíme zatáčky (červeně) a rovinky (černě), které tyto zatáčky spojují. Jednotlivé zatáčky vyřešíme nezávisle na sobě jakožto optimalizační úlohu nejrychlejšího průjezdu. Jednotlivé úlohy opatříme vhodnými podmínkami, které zajistí, aby vozilo po výjezdu z dané zatáčky bezprostředně „nevyjelo z trati“ apod. (tyto podmínky jsme na příkladu tří jízd naznačily v podkapitole 3.2). Obtížnost každé z těchto úloh je srovnatelná s úlohou vyřešenou v této podkapitole (viz obrázek 3.3). Po „vyřešení zatáček“ zbývá „vyřešit rovinky“, které tyto zatáčky spojují. Rovinky opět vyřešíme nezávisle na sobě. Při řešení úlohy nejkratšího průjezdu na rovince spojující dvě zatáčky je potřeba pouze vhodně zajistit počáteční a okrajové podmínky tak, aby rovinka plynule a optimálně napojila obě zatáčky. Tedy počáteční podmínky rovinky musí odpovídat koncovým podmínkám předchozí zatáčky a obdobně koncové podmínky rovinky musí odpovídat počátečním podmínkám následující zatáčky. Jako vhodný nástroj nevyžadující speciální diskusi pro každý případ, se jeví využití postupů dynamického programování, viz např. [11] nebo [13]. Tímto jsme pouze nastínili algoritmus řešící dlouhou trať složenou z „nezávislých úseků“. Je ale třeba poznamenat, že jednotlivé úseky jsou v jistém smyslu „závislé“. Vyřešíme-li jeden úsek (zatáčku), pak dostáváme trajektorii spolu s časem průjezdu. Tento čas je minimální. Často je ale žádoucí, aby výjezdová rychlost vozidla z daného úseku byla maximální (i za cenu toho, že čas průjezdu nebude nejmenší možný). Je to z toho důvodu, že za zatáčkou může navazovat dlouhá rovinka, na jejíž průjezd má vliv vstupní rychlost vozidla. Abychom výrazně snížili nebo zcela eliminovali „závislost“ zatáčky a následující rovinky, je třeba při rozdělení trati na jednotlivé úseky upravit výše zmíněné dělení takto: vymežíme zatáčky (na obrázku 3.4 červeně) a rovinky (černě). Ovšem zatáčku prodloužíme o skoro celou následující rovinku a rovinku naopak výrazně zkrátíme. Druhou možností je „mezi-rovinky“ úplně vypustit a trať rozdělit pouze na přímo navazující úseky „zatáčka + následující“ rovinka.

V tomto odstavci ještě nastíníme možnost, jak optimalizační výpočty zrychlit. Úloha je řešena v programu GAMS, který je založen na iteračních metodách. Úlohu je proto vhodné a snadné nejprve „hrubě“ diskretizovat. Řešení takové úlohy má malý počet proměnných a lze ji tak rychle vyřešit. Toto řešení pak použít při „jemnější diskretizaci“ úlohy jakožto vstup do první iterace. S využitím tohoto přístupu lze úlohy řešit rychleji a detailněji (jemnější diskretizace).

3.4 Návaznost práce

Tato práce nevznikla samoučelně, ale na základě projektu specifického výzkumu FSI-J-12-1803 řešeného na Fakultě strojního inženýrství, konkrétně na Ústavu automobilového a dopravního inženýrství. Na tomto projektu se podílel i autor této práce. Jedním z úkolů projektu je na základě GPS dat charakterizujících Masarykův okruh vytvořit matematický model tohoto známého brněnského závodního okruhu. Dále vytvořit matematický model závodního vozu a simulovat závodní jízdu a snažit se ji optimalizovat.

V této práci se povedlo vytvořit zjednodušený model závodní dráhy a vozidla. Model dráhy, který vychází z [3] je zatím vytvořen ve 2D. Data, která jsme v podkapitole 3.1 generovali pomocí matematického předpisu, mohou být snad nahrazena daty získanými z GPS měření. Vozidlo jsme v této práci uvažovali jako hmotný bod a předpokládali jsme jistá zjednodušení oproti reálnému vozidlu (např. zjednodušený popis přilnavosti pneumatik k vozovce nebo neuvážení vlivu přitlaku).

Podařilo se tak sestavit funkční a jednoduchý nástroj na matematické modelování závodní jízdy, který má více výhod, zejména:

- Relativně snadno lze úlohu zobecnit a rozšířit na úlohu ve 3D a podobně snadno lze zpřesnit model vozidla. Obojí lze realizovat odvozením a přidáním diferenčních rovnic do řízené soustavy vozidla (2.12).
- Na pohyb vozidla lze v modelu klást celou řadu různých (nejen počátečních a koncových) podmínek vymezujících pohyb vozidla.
- Rozšířením oboru regulace daného podmínkami (2.13), (2.14) a (2.16) lze zpřesnit regulované veličiny, zejména lze podrobně modelovat charakteristiky motoru vozidla.
- Vytvořený programový nástroj (tj. program napsaný v prostředí GAMS a MATLAB) lze snadno nastudovat a modifikovat a může tak sloužit pro širší spektrum uživatelů.
- V modelu i programu lze provést úpravy a tento ucelený nástroj (model a jeho programová implementace) může sloužit pro řešení optimalizačních úloh, pro něž ani nebyl původně určen (např. pro úlohu nejkratší cesty, pro úlohu minimální spotřeby paliva...).
- Program může sloužit pro často využívané ladění a optimální nastavení parametrů vozidla. Pro různé parametry provedeme optimalizaci jízdy a na základě výsledků vybereme optimální parametr.

Závěr

V první části práce je pomocí základních pojmů teorie optimálního řízení popsána problematika, které se práce věnuje. Na motivačním příkladu je v první kapitole zavedena a formulována úloha nejrychlejšího průjezdu jako úlohu optimálního řízení. Ukázali jsme, proč je problematické zkoušet řešit tuto úlohu analyticky a nastínili jsme možnost využití metod vhodného oboru (nelineárního programování) k jejímu numerickému řešení. V druhé kapitole jsme úlohu vhodným způsobem diskretizovali (vyšli jsme z idejí [3]) a podrobně se věnovali transformaci úlohy optimálního řízení formulované v první kapitole na úlohu nelineárního programování. Tím jsme vytvořili model jak vozidla, tak závodní dráhy a mohli jsme tak znovu formulovat úlohu nejrychlejšího průjezdu ve formě, kterou už lze efektivně naprogramovat. Transformace úlohy na úlohu nelineárního programování a její podrobné odvození tvoří stěžejní část této práce.

V třetí, poslední, kapitole práce jsme úlohu nejrychlejšího průjezdu implementovali pomocí programového systému MATLAB, který byl využit zejména pro vizualizaci, a GAMS, který sloužil pro optimalizační výpočty. Díky tomu se nám podařilo tuto úlohu vyřešit a aplikovat tak teorii optimálního řízení a nelineárního programování na konkrétní aplikační úlohu. V této kapitole jsme dále nasimulovali i rozšíření motivační úlohy nejrychlejšího průjezdu (uvedené v první kapitole práce) a výsledky těchto simulací okomentovali a předvedli. Ukázali jsme, jak lze úlohu vhodně a relativně snadno dále rozšířit a toto rozšíření implementovat.

Podařilo se tak splnit hlavní cíl této práce – na základě transformování úlohy na úlohu nelineárního programování formulovat úlohu nejrychlejšího průjezdu a vytvořit matematický nástroj, který je schopen ji vyřešit. Dále tato práce navazuje a částečně řeší aplikační úlohu řešenou Ústavem automobilového inženýrství na FSI VUT Brno v rámci projektu specifického výzkumu FSI-J-12-1803, na němž se autor této práce podílel. Podařilo se zároveň splnit i druhý cíl práce – přispět k vývoji modelů v návaznosti na existující požadavky současně řešených projektů. Svým způsobem práce překračuje i rozsah zadání, neboť implementace úlohy v prostředí GAMS umožňuje řešit i jiné úlohy optimalizace než je úloha nejrychlejšího průjezdu.

Literatura

- [1] BAZARAA, M., Hanif D. SHERALI a C. SHETTY. BAAZARA. Nonlinear programming: theory and algorithms. 3rd ed. Hoboken: John Wiley, 2006, xv, 853 s. ISBN 04-714-8600-0.
- [2] BETTS, John T. Practical methods for optimal control using nonlinear programming. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001, 190 p. ISBN 08-987-1488-5.
- [3] BRAGHIN, F., F. Cheli, S. Melzi a E. Sabboni. Race driver model. Computers. 2008, roč. 86, 13-14, s. 1503-1516. ISSN 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.04.028. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045794908000163>.
- [4] BROOKE Anthony, David Kendrick, Alexander Meeraus: GAMS: A User's Guide. GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA 2010.
- [5] BURGER, Martin. Infinite-dimensional Optimization and Optimal Design. Department of Mathematics, UCLA. Lecture Notes, 285J [online]. 2003 [cit. 2013-04-30]. Dostupné z: <ftp://ftp.math.ucla.edu/pub/camreport/cam04-11.pdf>.
- [6] ČERMÁK, Jan. Matematické základy optimálního řízení. Vyd. 1. Brno: PC-DIR, 1998, 68 s. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-1255-0.
- [7] DOUPOVEC, Miroslav. Diferenciální geometrie a tenzorový počet. 1. vyd. Brno: PC-DIR, 1999, 83 s. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-1470-7.
- [8] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Vyd. 1. Brno: Vutium, 2000. ISBN 80-214-1868-0.
- [9] CHACHUAT, Benoit C. Laboratoire d'automatique, Nonlinear and dynamic optimization, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne. Infoscience.epfl.ch [online]. Lausanne, 2007 [cit. 2013-04-30]. Dostupné z: [http://infoscience.epfl.ch/record/111939/files/Chachuat_07\(IC32\).pdf](http://infoscience.epfl.ch/record/111939/files/Chachuat_07(IC32).pdf).
- [10] MATHEWS, John H, Kurtis D. FINK a John H. MATHEWS. Numerical methods using MATLAB. 3rd ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1999, 662 p. ISBN 01-327-0042-5.
- [11] MINOUX, M., Mathematical Programming, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [12] PLESNÍK, Ján. Grafové algoritmy. Vyd. 1. Bratislava: VEDA, 1983, 344 s.
- [13] VARAIYA, Pravin. Lecture Notes on Optimization. Berkeley.edu [online]. 1998 [cit. 2013-04-30]. Dostupné z: http://paleale.eecs.berkeley.edu/~varaiya/papers_ps.dir/NOO.pdf.